موسوعة بحوث العمليات

(١)

البرمجة الرياضية

النماذج الخطية

الأستاذ الدكتور

لطفي لويز سيفين

الناشر

دار الجامعات المصرية

٢٢ ش الدكتور مصطفى مشرفة ـ الاسكندرية

ت : ٤٩٢٢٤٦٩

إلى أسرتى

أهدى هذا المؤلف ..

تقديم

بحوث العمليات هو المنهج العلمى لاتخاذ القرارات المتعلقة بالعمليات في المنظومات . فالإضافة العملية الرئيسية لبحوث العمليات هى استحداثه لنماذج مساعدة لاتخاذ القرارات[1]

وقد نشأ بحوث العمليات عام ١٩٢٨ فى بريطانيا العظمى مرتبطا بتطوير وزيادة فاعلية محطات الرادار[2] . فقد كان على بريطانيا وهى تتوقع هجوم المانيا الجوى عليها أن تجد وسيلة للإنذار المبكر يتيح لمقاتلاتها فترة كافية للطيران والاشتباك مع طائرات العدو قبل وصولها للعمق الاستراتيجى ، وهكذا بدأت مجموعة من العلماء بقيادة سير رويدت واطسون وات عام ١٩٣٥ فى تكثيف الجهد لإختراع هذه الوسيلة التى أطلق عليها فيما بعد الرادار . ولكنه لوحظ بعد إنشاء محطات الرادار وإجراء التجارب الميدانية أن المعلومات المستقاة من المحطات المختلفة تكون غير واضحة وأحيانا متعارضة ، ولذلك تطلب الأمر تكوين مجموعة عمل لبحث عملية الانذار بإستخدام الرادار شاملة تحليل البيانات من أفراد التشغيل وعلاقة ذلك بتوجيه المقاتلات نحو العدو الغير منظور وأنشىء لهذا الغرض قسم بحوث العمليات فى القوات الجوية الملكية تحت إشراف ويليامز

---

(1) Saul I. Gass « Deci2on - Alding Model : Validation, Assessment And Related Issues For Policy Analysis » Jr. Orea V 31 - No. 4

(2) Landers « The Orsgin Of Operatiol al Research » Jr. Ors V 32 No 2 1984

عام ١٩٣٨ ، وخلال هذه السنوات التى تلت ذلك اتضح أهمية الدراسات التى قام بها هذا القسم فى زيادة فاعلية تطوير الرادار كما قدم تحليلات علمية هامة فى دراسة معدل استنزاف المقاتلات وكان وراء قرار تشرشل فى سحب أسراب الطيران من فرنسا وكان كل ما سبق من العوامل الرئيسية فى إنتظار بريطانيا فى معركتها عام ١٩٤٠ :

وفى الولايات المتحدة نفس الأسلوب فى أواخر عام ١٩٤٠ فى دراسة الألغام المغناطيسية الألمانية وشل حركتها بمعادلة مغناطيسية السفن واستحداث ألغام أخرى متطورة. حيث إتضح للمشتغلين فى هذه العملية[1] أنه يمكن اعتبار التلغيم وإزالة فاعلية التلغيم مباراة . وبالتالى فإنه يمكن تطوير العملية والتنبؤ بفاعلية ونتائج نظام التلغيم بإستخدام النظريات الرياضية المباريات والإحصاء وقد أفادت الدراسات البحرية الأمريكية فى أختيار نوعية وطريقة بثر الألغام بالقاذفات (ب - ٢٩) فى مياه الجزر اليابانية وقد أدى ذلك إلى شل البحرية اليابانية تماما وقطع الأمدادات عنها فى منتصف عام ١٩٤٥ ويعتقد الكثير من الدارسين العسكريين أن هذا العمل كان النصر الحقيقى لحرب الباسفيك حتى قبل إسقاط القنابل الذرية على هيروشيما ونجازاكى :

وتم إنشاء قسم بحوث العمليات لدراسة العمليات الحربية فى أمريكا عام ١٩٤٨ بإسم « مكتب بحوث العمليات » وقد ساهم هذا المكتب بالعديد من الدراسات الهامة مثل استخدام الزنوج فى الجيش الأمريكى ودراسات التسليح النووى واستراتيجيات التسليح والمساعدات العسكرية . وكان له دور رئيسى وفعال فى الحرب الكورية عام ١٩٥٠ .

---

(1) Thornoin Pacbe, Gearge S Pelee, Wiuiam Wail.ce « Ellis A. Johnson 1906 - 1973 » Jr. Orsa V 22 - No. 6 1974

يؤكد ما سبق أن بحوث العمليات نشأ مرتبطاً بالعمليات العسكرية منذ حوالى ٥٠ عاماً : ولا يعنى ذلك أن التحليل العلمى للعمليات لم يبدأ إلا فى هذا الوقت امكن ظهور هذا التحليل العلمى وتميز كوظيفة ومسئولية محددة لم يتم إلا فى هذا التاريخ . وخلال الخمسين عاما التى تلت تكوين أول مجموعة لبحوث العمليات . فإن بحوث العمليات تطور بشكل لا يناظره إلا القليل من العلوم التطبيقية فمن ناحية فإن النظريات والرياضة شملت جوانب عديدة وموضوعات شتى تهدف إلى تحليل ودراسة الأوضاع المعقدة والمتفاوتة التى تنشأ فى التطبيقات العلمية ومن الناحية الأخرى فإن تطبيق بحوث العمليات فى مجالات عديدة شمل الإدارة والصناعة والزراعة والتصميم والصحة والتعليم والبيئة وعلوم الاجتماع حتى أصبح من سمات العصر (كالحاسبات الآلية التى ساهمت إلى حد كبير فى تطوير بحوث العمليات) إلى الدرجة التى أصبح فيها القائمين على بحوث العمليات يخشون أن ينفقد بحوث العمليات شخصيته المستقلة لتداخله فى كل المجالات .

وبالرغم من ذلك فإن علماء بحوث العمليات يجمعون أن اهم الموضوعات فى بحوث العمليات . وهو « العملية » لم يتم دراسته بالعمق الكافى الذى يؤدى إلى استخلاص مبادىء مبسطة وعامة تفيد فى تحليل وتركيب العمليات المعقدة[1] . كما هو الحال فى علوم الميكانيكا والفيزياء . وأنه لتحقيق مستقبل أفضل لبحوث العمليات من الناحية الإكاديمية والتطبيقية يتطلب الأمر توجيه الجهد لدراسة « العملية » وفك غموضها .

علينا إذن أن نعرف العملية ومن المفضل أن نبدأ بالعملية الحديثة حيث بدأ

---

(1) Seth Bonder « The Future of Operations Research » Jr. Orsa Ao 627 No 1979

بحوث العمليات العملية الحربية : ـ « مهمة تتضمن الحركة والإمداد والهجوم والدفاع وكل متطلبات المناورة » وباستعارة ما يتضمنه التعريف السابق من مفاهيم على العملية على وجه العموم فإنه العملية هي « مجموعة من الأفعال المطلوبة لتحقيق عائد مرغوب » ومعنى ذلك أن العملية ليست فعلا واحداً بل مجموعة من الأفعال التي تتم آليا أو في تتابع محدد لتحديد هدف موضوع .

و وضح الجدول التالي بعض العمليات الرئيسية التي تتخذ صفة العموم في مختلف التطبيقات والتي نوردها على سبيل المثال لا الحصر .

- التموين
- الرقابة
- التدفق
- البحث
- تحديد المواقع
- الجرد / التخزين
- تخصيص الموارد
- الحدود
- التعميم
- تخطيط المواقع
- الخدمة
- الطب
- التخطيط
- الشراء
- التعاقد
- التحميل
- الإدارة
- التفاوض
- التسويق
- التعداد
- التنظيم
- التوزيع
- الصيانة
- المعولية
- التأمين
- الاستبدال
- الإختبار
- التفتيش
- تشغيل البيانات
- استرجاع البيانات

يعتمد بحوث العمليات على قدرة المحلل في ترجمة المسألة القـاربة إلى شكل (عادة نموذج رياضي) يمكن استخدامه لمقارنة البدائل المختلفة والمفاضلة بينها واختبار مدى تحقيقها للأهداف الموضوعة . وخلال الخبرات الطويلة المستقاة

من الدراسة والتطبيق يكاد استقر الرأى أن الأسلوب التالى هو أكثر الأساليب فاعلية فى استخدام بحوث العمليات فى اتخاذ القرارات.

١ ـ تميز المشكلة

٢ ـ تحديد المشكلة وتعريفها

٣ ـ خلق بدائل ما قبل الحل

٤ ـ صياغة المسألة وتحليلها

٥ ـ جمع البيانات و / أو توليدها

٦ ـ استحداث نماذج

٧ ـ استحداث برامج الحاسب الآلى وتنفيذها

٨ ـ تقيم البدائل وتحليل الحساسية وإختيار المخاطرة

٩ ـ تحليل النتائج وتفسيرها

١٠ ـ تركيب وتصميم وإختراع بدائل ما بعد الحل

١١ ـ استحداث التوصيات

١٢ ـ التطبيق

صياغة المسألة واستحداث النماذج هى أهم مراحل استخدام بحوث العمليات فى إتخاذ القرارات لذلك فمن الضرورى تقييم هذا النموذج والتأكد من :

(أ) صدق النموذج (ب) صلاحية النموذج

والمقصود بصدق النموذج أو صحته هو التأكد من صحة جميع البيانات وتوابعها وصحة طريقة الحل وبرامج الحاسب الآلى المستخدمة وسلامتها وخلوه من اخطاء . بينما صلاحية النموذج تشمل :

(i) الصلاحية الفنية :

التأكد من صلاحية النموذج من حيث الأفتراضات والمعلومات والمنطق والمصادر ومطابقته للواقع العملى وصحة العلاقات الرياضية والمنطقية وإمكانية الحصول على البيانات المطلوبة .

(ii) المعولية :

ويشمل ذلك أيضا إختبار الحساسية للتأكد من صحة النتائج المستخلصة من استخدام النموذج فى حالة تغيير بارامترات المؤثرة وشديدة الحساسية ودراسة إمكانية إختزال المخاطرة نتيجة لحدوث بعض التغيرات الغير مرغوبة .

(iii) الديناميكية :

التأكد من تصرف النموذج مع الوقت والتنبؤ بتأثير الزمن على متغيراته الرئيسية واتخاذ الاحتياجات اللازمة لمراجعته وتحديثه .

لقد زاد الاهتمام فى السنوات الأخيرة بتقييم النماذج وذلك نظراً لاستخدام بحوث العمليات فى بعض التطبيقات الحكومية والسلوكية التى يتعذر فيها تقييم النموذج بتطبيقه على حالات سابقة لعدم وجود نظير لها واستحالة اختباره عمليا لعدم التطبيق الكامل لارتباطه بإستراتيجيات وسياسات ورأى عام .

لقد استلزم التطور السريع لعلم بحوث العمليات والاهتمام المتزايد به فى مصر والدول العربية إعادة كتابة مؤلفى الأول(*) الذى صدر منذ ثمان سنوات فقد تضمن المؤلف الجديد العديد من النماذج الحديثة وطرق الحل التى تطورت فى السنوات الأخيرة كما أنه تم باستخدامات الحاسبات الآلية وبالتطبيقات الجديدة لعلم بحوث العمليات وأدرج العديد من دراسات الحالات العملية المناسبة للتطبيق أو التى طبقت بالفعل فى مصر وذلك لتعميق المفهوم وتدريب القارىء والباحث على طرق الصياغة وحل النماذج والتغلب على الصعوبات فى التطبيق. ويقع المؤلف الجديد فى ثلاثة أجزاء :

الجزء الأول : وهو يختص بالنماذج الخطية .

الجزء الثانى : وهو يختص بالنماذج الغير خطية والديناميكية والعديدة الأهداف .

الجزء الثالث : ويشمل نماذج التدفق والتخزين .

ونرجو أن يحقق المؤلف الغرض الموضوع من أجله والفائدة المرجوة .

والله الموفق ؟

د . لطفى لويز
١٩٨٥

(*) د . لطفى لويز سيفين
« بحوث العمليات ـ المنهج الكمى لإتخاذ القرارات »
دار الجامعات المصرية ١٩٧٧

مقدمة رياضية

يعتبر الإلمام بالأدوات الرياضية الأساسية من المتطلبات الهامة التى تساعد دارس بحوث العمليات على فهم أدق وإستيعاب أكبر للأساليب التى يتعرض لها خلال دراسته لهذا العلم . لهذا خصصنا هـذا الجزء من الكتاب ليـكون مقـدمة رياضية شاملة يمـكن للقارىء الملم بها أن يغفلها أو يرجع لها عند اللزوم .

اولا : المصفوفات والمعادلات الخطية :

١ ـــ افترض أنه لدينا مجموعة من العناصر المترتبة والتى تكون التتابع التالى على شكل صف :

ا١ ا٢ ا٣ .... ان

هذا التتابع يمكن أن نسميه مصفوفة ذات بعد واحد (صف)

فإذا رتبنا العناصر فى شكل رباعى (بعدين) على النحو التالى :

ا١١ ا٢١ ا٣١ ... ا١ن
ا١٢ ا٢٢ ا٣٢ ... ا٢ن
ا١٣ ا٢٣ ا٣٣ ... ا٣ن
. . . .
ام١ ام٢ ام٣ ام ن

والذى يحتوى على عدد من الصفوف مقداره م وعدد من الأعمدة مقداره ن سمى هذا الترتيب بالمصفوفة (م × ن)

يمـكن استخدام المصفوفات فى التعبير عن قواعد حسابية مثل الجمـع والطرح والضرب . ويستخدم عادة فى حل المعادلات الخطية .

٢ — حل المعادلات الخطية :

من الطرق الهامة لحل المعادلات الخطية طريقة الاختزال لجاوس وجوردن لحل المعادلات الخطية على الصورة :

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{ا}_{11}\text{س}_1 + \text{ا}_{21}\text{س}_2 + \text{ا}_{31}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}_1 \\
\text{ا}_{12}\text{س}_1 + \text{ا}_{22}\text{س}_2 + \text{ا}_{32}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}2}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}_2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\text{ا}_{1\text{م}}\text{س}_1 + \text{ا}_{2\text{م}}\text{س}_2 + \text{ا}_{3\text{م}}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{م}}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}_\text{م}
\end{array}\right\} \quad (١)
$$

حيث س_1 ، س_2 ، ... ، $\text{س}_\text{ن}$ المتغيرات المطلوب إيجادها وبفرض أن أن المسألة (١) لها حل فإن طريقة الاختزال لجاوس وجوردان تقترح الخطوات التالية :

الخطوة الأولى :

افترض أن $\text{ا}_{11} \neq$ صفر (يمكن بإستمرار تحقيق هذا الشرط بترتيب المعادلات) إقسم طرفى المعادلة الأولى على ا_{11} وبذلك تكون المعادلة الجديدة الناتجة :

$$
\text{س}_1 + \text{ا}'_{21}\text{س}_2 + \text{ا}'_{31}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}'_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}'_1 \qquad (٢)
$$

إضرب طرفى المعادلة (٢) فى ا_{11} ، ا_{12} ، $\text{ا}_{1\text{م}}$ على الترتيب ثم اطرحه من المعادلات الثانية والثالثة والميمية فى النظام (١) على الترتيب . وبذلك تختزل مجموعة المعادلات (١) إلى :

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{س}_1 + \text{ا}'_{21}\text{س}_2 + \text{ا}'_{31}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}'_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}'_1 \\
\text{ا}'_{22}\text{س}_2 + \text{ا}'_{32}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}'_{\text{ن}2}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}'_2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\text{ا}'_{2\text{م}}\text{س}_2 + \text{ا}'_{3\text{م}}\text{س}_3 + \cdots + \text{ا}'_{\text{ن}\text{م}}\text{س}_\text{ن} = \text{ح}'_\text{م}
\end{array}\right\} \quad (٣)
$$

الخطوة الثانية :

إفترض أن $\text{أ}'_{٢٢} \neq$ صفر (إذا لم يتوفر هـذا الشرط رتب المعادلات بحيث يتوفر الشرط السابق) إقسم المعادلة الثانية فى النظام على $\text{أ}'_{٢٢}$ وبذلك تؤول هذه المعادلة إلى :

$$\text{س}_{٢} + \text{أ}''_{٢٣}\,\text{س}_{٣} + \cdots + \text{أ}''_{٢\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} = \text{ح}''_{٢} \qquad (٤)$$

إضرب طرفى المعادلة (٤) فى $\text{أ}'_{١٢}$ ، $\text{أ}'_{٣٢}$ ، ... $\text{أ}'_{\text{م}٢}$ ثم اطرحها من جمع المعادلات الأخرى فنحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} \text{س}_{١} \quad + \text{أ}''_{١٣}\,\text{س}_{٣} + \cdots + \text{أ}''_{١\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} = \text{ح}''_{١} \\ \text{س}_{٢} + \text{أ}''_{٢٣}\,\text{س}_{٣} + \cdots + \text{أ}''_{٢\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} = \text{ح}''_{٢} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \text{أ}''_{\text{م}٣}\,\text{س}_{٣} + \cdots + \text{أ}''_{\text{م}\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} = \text{ح}''_{\text{م}} \end{array}\right\} \qquad (٥)$$

الخطـوة الثالثة :

استمر فى العملية السابقة عـــدد من المرات مقـداره ل ــ فإذا كانت ل $=$ م $=$ ن ــ حصلنا على حل فريد للمسألة (١) .

إذا كانت ل $\neq$ م (م $>$ ل) لدينا أحد بديلين إما أن تـكون م $>$ ل ويكون الطرف الأيسر لواحد أو أكثر من المعادلات الباقية (ولنفرض إنهـا المعادلة ى) لا يساوى الصفر أى أن :

$$\text{صفر} = \text{ح}^{(\text{ل})}_{\text{ى}} \quad (\text{بينما فى الحقيقة } \text{ح}^{(\text{ل})}_{\text{ى}} \neq \text{صفر})$$

وبذلك يكون افتراضنا بأن النظام (١) له حل غير صحيح ويسمى النظام(١) بأنه نظام متناقض (غير متسق) — أو لا يكون هناك تناقض وتختزل مجموع المعادلات (١) إلى :

$$\left.\begin{array}{l} س_{١} = هـ_{١} + ب_{١٢} س_{ل+١} + \cdots + ب_{١،ن-ل} س_{ن} \\ س_{٢} = هـ_{٢} + ب_{١١} س_{ل+١} + \cdots + ب_{٢،ن-ل} س_{ن} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ س_{ل} = هـ_{ل} + ب_{ل١} س_{ل+١} + \cdots + ب_{ل،ن-ل} س_{ن} \end{array}\right\} \quad (٦)$$

حيث هـ ، ب ثوابت معلومة متعلقة بالمعاملات فى النظام (١) : ولما كان النظامين ١ ، ٦ متناظران بمعنى أن أى منهم يستلزم الآخر — فإن حل النظام (١) يعطى بالمعاملات $س_{١}$ ، ... ، $س_{ن}$ بالمعاملات هـ ، ب . أى قيم اختيارية لباقى المتغيرات ن — ل . وبذلك لا يتوفر لدينا حل وحيد للمسألة (١) وتكون باقى المعادلات (ن — ل) توفيق (تجميع خطى) من المعادلات (ل) .

مثال : حل مجموعة المعاملات

$$\begin{array}{l} س_{١} + ٢س_{٢} - س_{٣} - ٢س_{٤} = -١ \\ ٢س_{١} + س_{٢} - س_{٣} - س_{٤} = ٤ \\ س_{١} - س_{٢} + ٢س_{٣} + س_{٤} = ٥ \\ س_{١} + ٣س_{٢} - ٢س_{٣} - ٣س_{٤} = -٣ \end{array}$$

الخطوة الأولى :

$$س_١ + ٢س_٢ - س_٣ - ٢س_٤ = -١$$
$$-٣س_٢ + ٣س_٣ + ٣س_٤ = ٦$$
$$-٣س_٢ + ٣س_٣ + ٣س_٤ = ٦$$
$$س_٢ - س_٣ - س_٤ = -٢$$

الخطوة الثانية :

$$س_١ + س_٢ = ٣$$
$$س_٢ - س_٣ - س_٤ = -٢$$
$$صفر = صفر$$
$$صفر = صفر$$

فإذا وضعنا $س_٣ = ب_١$ ، $س_٤ = ب_٢$ فإن حل هذا النظام يعطى بما يلى :

$$س_١ = ٣ - ب_١$$
$$س_٢ = -٢ + ب_١ + ب_٢$$
$$س_٣ = ب_١$$
$$س_٤ = ب_٢$$

حيث $ب_١$ ، $ب_٢$ ثوابت اختيارية . ومن ثم نستنتج أن المعادلة الثالثة والرابعة فى هذا المثال هى تجمع خطى من المعادلتين الأولى والثانية وهذا صحيح حيث أن المعادلة الثالثة وهى :

$س_١ - س_٢ + ٢س_٣ + س_٤ = ٥$ يمكن الحصول عليها من طرح المعادلة الأول من الثانية $(٢س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤) - (س_١ + ٢س_٢ - س_٣ - ٢س_٤)$
$= ٤ - (-١)$

والمعادلة الرابعة :

$س_١ + ٣س_٢ - ٢س_٣ - ٣س_٤ = - ٣$ يمكن الحصول عليها من :

$\frac{٥}{٣}(س_١ + ٢س_٢ - س_٣ - ٢س_٤) - \frac{١}{٣}(٢س_١ + س_٢ + س_٣ - س_٤)$

$= \frac{٥}{٣}(- ١) - \frac{١}{٣}(٤)$

٣ — المصفوفات :

أن مجموعة المعادلات فى (١) يمكن النظر إليها على أنها تمثل ما يسمى بالتحويل الخطى والذى يتم فيه تحويل مجموعة الأعداد $(س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن)$ إلى مجموع الأعداد $(ح_١ ، ح_٢ ، ... ، ح_ر)$. والترتيب الرباعى للمعاملات $أ_{ور}$ يحدد هذا التحويل . هذا الترتيب يوضح بين قوسين مربعين ويرمز له بالرمز :

$$[أ] = [أ_{ور}] = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & \cdots & أ_{٣ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{١} & أ_{٢} & \cdots & أ_{ن} \end{bmatrix} \quad (٧)$$

وتسمى المصفوفة السابقة كما سبق وذكرنا بأنها مصفوفة م × ن . ويحدد الرمز $أ_{ور}$ مدخل (عنصر) عام لهذه المصفوفة حيث يبين المدلول (و) الصف بينما يحدد المدلول الثانى (ر) العمود . وتمثل الكميات $س_{ر}$ ، ر $= ١ ، ٢ ، ... ، ن$ والثوابت $ح_{و}$ ، و $= ١ ، ... ، م$ مصفوفة مكونة من عمود واحد :

$$\text{س} = \{\text{س}_{\text{ر}}\} = \begin{Bmatrix} \text{س}_{١} \\ \text{س}_{٢} \\ \vdots \\ \text{س}_{\text{ن}} \end{Bmatrix}$$

$$\text{ج} = \{\text{ح}_{\text{و}}\} = \begin{Bmatrix} \text{ح}_{١} \\ \text{ح}_{٢} \\ \vdots \\ \text{ح}_{\text{م}} \end{Bmatrix} \qquad (٨)$$

وبذلك يمكن التعبير عن النظام (١)

$$\text{ا}\ \text{س} = \text{ج} \qquad (٩)$$

ولما كان النظام فى (١) يعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ور}}\ \text{س}_{\text{ر}} = \text{ح}_{\text{و}} \qquad (١٠)$$

$\text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م}$ أو بصورة أخرى :

$$\{\text{ا}_{\text{ور}}\ \text{س}_{\text{ر}}\} = \{\text{ح}_{\text{و}}\} \qquad (١١)$$

حيث أن ٩ ، ١٠ متناظران فإنه يتوفر لدينا المعادلة التعريفية التالية :

$$[\text{ا}_{\text{ور}}]\ \{\text{س}_{\text{ر}}\} = \{\sum \text{ا}_{\text{ور}}\ \text{س}_{\text{ر}}\} \qquad (١٢)$$

هذه المعادلة صحيحة فى حالة واحدة فقط وهى تساوى عدد الأعمدة فى العامل الأول بعدد الصفوف فى العامل الثانى لاحظ أن $\text{ا}_{\text{ور}}$ معامل فى الصف (و) والعمود (ر) فى المصفوفة ولما كانت (و) تتغير من ١ إلى م ، (ر) تتغير من ١ إلى ن فإن التعريف فى (١٢) يؤدى إلى أن حاصل ضرب مصفوفة (م × ن) فى مصفوفة ذات عمود واحد (ن × ١) هى مصفوفة ذات عمود واحد (م × ١)

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين باستخدام العلاقة التعريفية في (١٢) .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \text{صفر} & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\times 2 + 3\times 3 \\ 0\times 2 + 2\times 3 \\ 2\times 2 + (-1)\times 3 \end{Bmatrix}$$

والآن افترض أنه لدينا عدد من المتغيرات مقدارها (ن) وهى س_1 ، س_2 ، ... ، $\text{س}_\text{ن}$. يمكن الحصول عليها بتوفيق خطى من مجموعة أخرى من المتغيرات ص_1 ، ص_2 ، ... ، $\text{ص}_\text{ف}$ عددها ف . أى أنه يتوفر لدينا العلاقة التالية :

$$\text{س}_\text{و} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ف}} \text{ب}_{\text{و ر}}\,\text{ص}_\text{ر} \qquad (13)$$

$$\text{و} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{ن}$$

ولما كان من المعادلة (١٠) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{و ر}}\,\text{س}_\text{ر} = \text{ح}_\text{و}$ فإنه :

بالتعويض من (١٢) فى (١٠) نحصل على :

$$\sum_{\text{ب}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{و ل}} \Big(\sum_{\text{ل}=1}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{ل ر}}\,\text{ص}_\text{ر} \Big) = \text{ح}_\text{و} \qquad (14)$$

أو بصورة أخرى :

$$\sum_{\text{ب}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{و ل}} \Big(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{ل ر}}\,\text{ص}_\text{ر} \Big) = \text{ح}_\text{و} \qquad (15)$$

والتى يعبر عنها بالتحويل التالى :

س = ب ص   (١٦)

للمعادلة (١٣) ،

أ (ب ص) = ج   (١٧)

المعادلة (١٥) . فإذا كتبنا :

ﻫ و ر = مجـ (ن ، ب = ١) أ و ل ب ل ر   (١٨)

فإنه يمكن التعبير عن (١٥) بالصورة :

مجـ (ف ، ر = ١) ﻫ و ر ص ر = حـ و   (١٩)

وباستخدام المصفوفات يؤدى هذا التعبير إلى:

ﻫ = أ ب   (٢٠)

أى :

[ﻫ و ر] = [مجـ أ و ل ب و ل]   (٢١)

ﻫ ص = ج

ومنها :

(أ ب) ص = ج

ومن (١٧) ، (٢١) نحصل على:

أ (ب ص) = (أ ب) ص

ويلاحظ من المعادلة (٢٠) أن حاصل ضرب مصفوفة ل × م فى مصفوفة م × ف هو مصفوفة ل × ف .

كما يلاحظ أن المعاملات هو ر للمصفوفة هـ الناتجة من ضرب المصفوفة ا ب نتج من حاصل ضرب معاملين متناظرين فى الصف (و) للمعامل الأول مع العمود (ر) للمعامل الثانى ثم جمع الناتج جبريا . مثلا حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1\times2+2\times1+3\times1+3\times2) & (1\times0+2\times1+3\times4+3\times2) & (1\times3+2\times3+2\times(-1)+3\times1) \\ (0\times1+1\times1+1\times2+(-1)\times2) & (0\times0+1\times1+1\times4+(-1)\times2) & (0\times3+1\times2+1\times(-1)+(-1)\times1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 16 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

٤ — خواص المصفوفات

● المصفوفة ا ب يمكن تحديدها إذا كان عدد الأعمدة فى ا مساويا عدد الصفوف فى ب . إذا كانت ا مصفوفة م × ن ، ب مصفوفة ن × م فإن

هـ = ا ب مصفوفه م × م . بينما هـ = ب ا مصفوفة ن × ن وحتى فى الحالة الخاصة عندما تكون كلا من ا ، ب مصفوفة مربعة فإن :

ا ب ≠ ا ب على وجه العموم ، ولتوضيح ذلك أعتبر أن المصفوفتين ا ، ب على الصورة :

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\text{اب} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ا}_{11}\text{ب}_{11} + \text{ا}_{21}\text{ب}_{12} & \text{ا}_{11}\text{ب}_{21} + \text{ا}_{21}\text{ب}_{22} \\ \text{ا}_{12}\text{ب}_{11} + \text{ا}_{22}\text{ب}_{12} & \text{ا}_{12}\text{ب}_{21} + \text{ا}_{22}\text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{با} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ب}_{11}\text{ا}_{11} + \text{ب}_{21}\text{ا}_{12} & \text{ب}_{11}\text{ا}_{21} + \text{ب}_{21}\text{ا}_{22} \\ \text{ب}_{12}\text{ا}_{11} + \text{ب}_{22}\text{ا}_{12} & \text{ب}_{12}\text{ا}_{21} + \text{ب}_{22}\text{ا}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{اب} \neq \text{با} \qquad (٢٤)$$

لذلك من المهم التأكد من صحة ترتيب الضرب فى المصفوفات

• • تسمى المصفوفتان ا ، ب انهما متساويتان ا = ب إذا كان :

$\text{ا}_{\text{و ر}} = \text{ب}_{\text{و ر}}$ وذلك لجميع قيم و ، ر : كذلك إذا كان :

ه = ا + ب فإن هذا يعنى أن : $\text{ه}_{ون} = \text{ا}_{ون} + \text{ب}_{ون}$

وينتج من ذلك أن العلاقات التالية صحيحة :

$$\text{ا} + \text{ب} = \text{ب} + \text{ا} \quad ، \quad \text{ا} + (\text{ب} + \text{حـ}) = (\text{ا} + \text{ب}) + \text{حـ} \qquad (٢٥)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{اب})\,\text{ج} = \text{ا}\,(\text{بج}) \\ \text{ا}\,(\text{ب} + \text{ج}) = \text{اب} + \text{اج} \end{array}\right\} \qquad (٢٦)$$

●●● يمكن تجزئة المصفوفة ا إلى مجموعة من المصفوفات الجزئية . على سبيل المثال فإن المصفوفة المربعة ا التالية جزءت إلى أربعة مصفوفات :

$$\begin{bmatrix} \text{د}_{٢١} & \text{د}_{١١} \\ \text{د}_{٢٢} & \text{د}_{١٢} \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} \text{ا}_{٣١} & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{١٢} \\ \hdashline \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٢٣} & \text{ا}_{١٣} \end{array}\right| = \text{ا}$$

حيث :

$$\text{د}_{١١} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{١٢} \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{د}_{٢١} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{٣١} & \text{ا}_{٢١} \\ \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٢٢} \end{bmatrix}$$

$$\text{د}_{١٢} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{١٣} \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{د}_{٢٢} \begin{bmatrix} \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٢٣} \end{bmatrix}$$

فإذا تم تجزئة مصفوفة أخرى ب بنفس الكيفية فإنه يمكن ضرب المصفوفات الجزئية على أعتبار أنها عناصر ولكى يتم ذلك يجب أن يتوفر الشرط الأساسى التالى :

لكل خط رأس يفصل العمود (ر) عن (ر + ١) فى المصفوفة الأولى

[أ] هناك خط أفقي يفصل الصف (ر) عن (ر+١) في المصفوفة الثانية [ب] . أي أن ب في هذه الحالة تقسم كما يلي :

$$ب = \begin{bmatrix} ب_{11} & ب_{21} & \vdots & ب_{31} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ب_{12} & ب_{22} & \vdots & ب_{32} \\ ب_{13} & ب_{23} & \vdots & ب_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} هـ_{11} & هـ_{21} \\ هـ_{12} & هـ_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore أب = \begin{bmatrix} ء_{11} & ء_{21} \\ ء_{12} & ء_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} هـ_{11} & هـ_{21} \\ هـ_{12} & هـ_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ء_{11}هـ_{11} + ء_{12}هـ_{12} & ء_{11}هـ_{21} + ء_{21}هـ_{22} \\ ء_{12}هـ_{12} + ء_{22}هـ_{12} & ء_{12}هـ_{21} + ء_{22}هـ_{22} \end{bmatrix}$$

٥ — المحددات وقاعدة كرامر :

يصاحب كل مصفوفة مربعة أ (ن × ن) — محدده [أ] = $|أ_{ور}|$ حيث

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & \cdots & أ_{1ن} \\ أ_{12} & أ_{2} & \cdots & أ_{2ن} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ أ_{ن1} & أ_{ن2} & & أ_{نن} \end{vmatrix} \qquad (٢٧)$$

وتسمى ن درجة المصفوفة والمحددة . وتعطى محددة المصفوفة المربعة من الدرجة الثانية بالعلاقة :

$$[أ] = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix} = أ_{11}أ_{22} - أ_{21}أ_{12}$$

على سبيل المثال محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

تساوى $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ - ٢ \times ١ = ١٠$

ولإيجاد المحددات لدرجة أعلى من إثنين يلزمنا بعض التعريفات :

<u>المحددة الصغرى أو</u>

<u>المحيدد</u> هى محددة ناتجة عن حذف عدد من الصفوف وعدد مماثل من الأعمدة فإذا كانت المحددة الأصلية على الصورة :

$$[\text{ا}] = \begin{vmatrix} \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{٣١} \cdots & \text{ا}_{١ن} \\ \text{ا}_{١٢} & \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{٣٢} \cdots & \text{ا}_{٢ن} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ا}_{ن١} & \text{ا}_{ن٢} & \text{ا}_{ن٣} & \text{ا}_{نن} \end{vmatrix}$$

وحذفنا عدد (ن — ١) من الصفوف وعدد (ن — ١) من الأعمدة لحصلنا على المحيدد $\text{ى}_١ \,|\, \text{ا}_{١١} \,|$ وهو محيدد من الدرجة الأولى . فإذا حذفنا ن — ٢ من الصفوف والأعمدة لحصلنا على :

$$\text{ى}_٢ = \begin{vmatrix} \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{٢١} \\ \text{ا}_{١٢} & \text{ا}_{٢٢} \end{vmatrix}$$

وهو محيدد من الدرجة الثانية . وهكذا حتى نصل إلى حذف صف وعمود أخير واحد فنحصل على :

$$\text{ى}_{ن-١} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{٢١} & & \text{ا}_{١\,ن-١} \\ \text{ا}_{١٢} & \text{ا}_{٢٢} & & \text{ا}_{٢\,ن-١} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \text{ا}_{ن-١\,١} & \text{ا}_{ن-١\,٢} & & \text{ا}_{ن-١\,ن-١} \end{vmatrix}$$

وهو المحيدد من الدرجة ن — ١ وواضح أن $|\,\text{ا}\,| = \text{ى}_ن$

ويعرف المرافق $\text{ص}_{\text{ون}}$ للعنصر $\text{أ}_{\text{ون}}$ فى المحدد | أ | بأنه المقدار :

$$\text{ص}_{\text{ون}} = (-1)^{(\text{و}+\text{ن})} \text{ء}_{\text{ون}} \qquad (٢٨)$$

حيث $\text{ء}_{\text{ون}}$ هو المحدد الناتج عن حذف الصف والعامود الواقعين على العنصر $\text{أ}_{\text{ون}}$. ومن هذا يمكن تحديد قيمة المحدد | أ | من العلاقة :

$$|\text{أ}| = \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ون}} \ \text{ص}_{\text{ون}} \qquad (٢٩)$$

ويمكن إثبات الخواص الهامة التالية للمحددات :

- إذ كانت جميع العناصر فى صف أو عمود لمصفوفة ما تساوى الصفر فإن محددة هذه المصفوفة تساوى الصفر .
- لا تتغير قيمة المحدد بتغيير وضع الصفوف والأعمدة .
- إذا تساوى صفين أو عمودين أو تناسباً فى مصفوفة ما فإن محددة هذه المصفوفة تساوى الصفر .
- إذا أضيف على عناصر أى صف أو عامود مضروبها فى ك فإن قيمة المحددة لا تتغير .

كما يمكن أيضاً من المعادلة (٢٩) الحصول على قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية والتى تنص على أنه إذا كانت أعمدة | $\text{أ}_{\text{ون}}$ | لمصفوفة معاملات نظام من المعادلات الجبرية الخطية فى عدد من المجاهيل س_1 ، س_2 ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ عددها ن لا تساوى الصفر . فهذه المجموعة من المعادلات لها حل فريد وقيمة $\text{س}_{\text{ر}}$ يمكن تعيينها كنسبة من محددتين ، المقام هو محددة المعاملات والبسط محدد

المصفوفة المكونة من المعاملات بعد استبدال العامود المناظر لمدلول $\text{س}_\text{ر}$ (ر) بقيم العامود للطرف الأيسر المعادلات { حو }. ولاستيضاح هذه القاعدة نورد المثال التالى :

أوجد قيم س_1 ، س_2 ، س_3 التى تحقق المعادلات التالية :

$$2\text{س}_1 + 3\text{س}_2 + \text{س}_3 = 12$$

$$\text{س}_1 - 4\text{س}_2 + 2\text{س}_3 = 1$$

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 = 7$$

$$\text{س}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\text{س}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$س_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{-4} = 4$$

وفى الحالة التى تكون فيها جميع المعاملات ح و تساوى الصفر . تسمى مجموعة المعادلات بالمعادلات المتجانسة فإذا كانت | ا | ≠ صفر فإن الحل الوحيد الممكن هو الحل الصفرى $س_1 = س_2 = \dots = س_ن =$ صفر وبمعنى آخر لكى يكون لنظام المعادلات المتجانس حل غير صفرى فإنه يجب أن تكون :

$$| ا | = \text{صفر}$$

وفيما يلى بعض النتائج الهامه للمحددات :

— محددة المصفوفة المكونة من حاصل ضرب مصفوفتين تساوى حاصل ضرب محددتى المصفوفتين :

$$| ا ب | = | ا | \times | ب | \qquad (٣٠)$$

— تسمى مصفوفة مربعة بأنها وحيدة Singular Matrix إذا كانت محددتها تساوى الصفر فإذا لم يتحقق الشرط السابق سميت المصفوفة بأنها غير وحيدة Non - Singular Matrix

— إذا كان لدينا مصفوفة م على الصورة :

$$م = \left[\begin{array}{c|c} [\text{صفر}] & ا \\ \hline ب & ح \end{array}\right] \quad \text{او} \quad م = \left[\begin{array}{c|c} ا & ب \\ \hline ح & [\text{صفر}] \end{array}\right]$$

فإن : $[\text{م}] = [\text{ا}] \times [\text{ب}]$ (٣١)

وذلك بشرط أن تكون كلا من م ، [صفر] مصفوفة مربعة

٦ ـ بعض المصفوفات الخاصة

(ا) المصفوفة اَ المكونة من المصفوفة $\text{ا} = [\text{ا}_{\text{ون}}]$ وذلك باستبدال الصفوف محل الأعمدة تسمى بمعكوسة ا Transpose

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{١٢} & \cdots & \text{ا}_{١\text{ن}} \\ \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{٢٢} & \cdots & \text{ا}_{٢\text{ن}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{م}١} & \text{ا}_{\text{م}٢} & & \text{ا}_{\text{من}} \end{bmatrix} ،$$

$$\text{اَ} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{٢١} & \cdots & \text{ا}_{\text{م}١} \\ \text{ا}_{١٢} & \text{ا}_{٢٢} & \cdots & \text{ا}_{\text{م}٢} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{١\text{ن}} & \text{ا}_{٢\text{ن}} & \cdots & \text{ا}_{\text{من}} \end{bmatrix} \qquad (٣٢)$$

وواضح أن معكوسة مصفوفة م × ن هى مصفوفة ن × م . كذلك إذا كانت [ا] مصفوفة م × ل ، [ب] مصفوفة ل × ن فإن [ا ب] هو مصفوفة م × ن كذلك فإن حاصل الضرب [بَ] [اَ] هو مصفوفة ن × م أى أن :

$$[\text{ا ب}]' = [\text{بَ}]\,[\text{اَ}] \qquad (٣٣)$$

أى أن معكوسة حاصل ضرب مصفوفتين يساوى حاصل ضرب معكوستى المصفوفتين بترتيب مخالف .

(ii) إذا كونت مصفوفة [ا+] من المصفوفة [ا] = [او ن م] وذلك باستبدال كل عنصر او ن م فى المصفوفة بمرافقه ص او ن م ثم استبدال الصفوف محل الأعمدة . فإن المصفوفة الناتجة من هذه العملية [ا+] تسمى بالمصفوفة المجاورة للمصفوفة ا .

$$ا^{+} = \begin{bmatrix} ص_{١١} & ص_{١٢} & \cdots & ص_{ن١} \\ ص_{٢١} & ص_{٢٢} & \cdots & ص_{ن٢} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ص_{ن١} & ص_{ن٢} & & ص_{نم} \end{bmatrix} \quad (٣٤)$$

(iii) مصفوفة الوحدة Identity Matrix (ى) هى مصفوفة ن × ن تحوى الواحد الصحيح فى قطرها الأساسى وأصفار فيما عدا ذلك :

$$ى = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ١ & \cdots & ٠ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ٠ & ٠ & \cdots & ١ \end{bmatrix} \quad (٣٥)$$

أما المصفوفة الصفرية [صفر] فهى تحتوى الصفر فى جميع مداخلها وواضح أن :

$$\left.\begin{array}{l} [ا] [ى] = [ى] [ا] = [ا] \\ [ا] [صفر] = [صفر] [ا] = صفر \end{array}\right\} \quad (٣٦)$$

وتعرف الكرونيكر دلتا بما يلى :

$$\delta_{ور} = \begin{cases} \text{صفر عندما } و \neq ر \\ ١ \quad \text{عندما } و = ر \end{cases} \qquad (٣٧)$$

بمعنى أن $ى = [\delta_{ور}]$ (٣٨)

(١٧) إذا كانت عناصر المصفوفة تساوى الصفر فيما عدا وترها سميت هذه المصفوفة بالمصفوفة الوترية diagônal Matrix .

وتعطى ب :

$$ت = [ت_ر \ \delta_{ور}] = [ت_و \ \delta_{ور}] \qquad (٣٩)$$

حيث القيم للعناصر الوترية التى تحقق الشرط و = ر هو :

$ت_١ ، ت_٢ ، ... ، ت_ن$ وعادة يرمز لها بالرمز :

$$ت = وتر [ت_١ ، ت_١ ، ت_٢ ، ... ، ت_ن] \qquad (٤٠)$$

وطبقاً لقواعد ضرب المصفوفات فإنه إذا ضربت المصفوفه [ا] ضربا مسبقا فى [ت] فإن العمود ر للمصفوفة ا يضرب فى $ت_و$. بينما إذا ضربت المصفوفة ا ضربا لاحقا فى [ت] فإن العمود ر للمصفوفة ا يضرب فى $ت_ر$.

$$ا ت = [ت_ر \ ا_{ور}] \qquad (٤١)$$

فإذا تساوت جميع العناصر الوترية فى مصفوفة وترية سميت هذه المصفوفة بالمصفوفة الثابتة Scalar Matrix

وواضح أن المصفوفة الثابتة تعطى بالعلاقة :

$$[ب] = ك [ى] = [ك \ \delta_{ور}] \qquad (٤٢)$$

٧ — جبر المصفوفات :

مقلوب المصفوفة . يعرف مقلوب المصفوفة المربعة ا والذى يرمز له بالرمز $ا^{-1}$ بأنه تلك المصفوفة التى اذا ضربت فى ا كان الناتج مصفوفة الوحدة ى

أى أن :

$$ا\ ا^{-1} = ى \qquad (٤٣)$$

وعناصر المصفوفة $ا^{-1}$ تتكون من $\frac{1}{|ا|}$ [$ص_{ر و}$] حيث $ص_{و ر}$ مرافق العنصر $ا_{و ر}$ فى المصفوفة ا ، [ا] محددة المصفوفة ا . أى أنه للحصول على مقلوب المصفوفة ا تتبع الخطوات التالية :

١ — تستبدل عناصر المصفوفة $ا_{و ر}$ بالمرافق $ص_{و ر}$.

٢ — توجد معكوسة المصفوفة السابقة وذلك بأن تستبدل $ص_{و ر}$ بـ $ص_{ر و}$

٣ - تقسم جميع عناصر المصفوفة الناتجة من الخطوات السابقة على محدده ا أى $|ا|$.

وواضح أن $[ا^{-1}] = \frac{1}{|ا|} [ا^{+}] \qquad (٤٤)$

كذلك نوضح أن :

$$(ا ب)^{-1} = ب^{-1} ا^{-1} \qquad (٤٥)$$

أى أن مقلوب حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب مقلوبتيهما فى ترتيب معكوس

مثال :

أوجد مقلوب المصفوفة :

$$ا = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \quad \text{وحقق أن} \quad ا \, ا^{-١} = ى_{م}$$

$$|ا| = ٣(-٢) - ٢(-٨) + ١(١) = ١١$$

$$م_{١١} = (-١)^{٢} \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$$

$$م_{٢١} = (-١)^{٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = -(-٨) = ٨$$

$$م_{٣١} = (-١)^{٤} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ١(١) = ١$$

$$م_{١٢} = (-١)^{٣} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = ١$$

$$م_{٢٢} = (-١)^{٤} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = -٤$$

$$م_{٣٢} = (-١)^{٥} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٥$$

$$م_{١٣} = (-١)^{٤} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٤$$

$$م_{٢٣} = (-١)^{٥} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -٥$$

$$م_{٣٣} = (-١)^{٦} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$$

$$[أ^{+}] = \begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٤ \\ ٨ & -٤ & -٥ \\ ١ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{[أ]} [أ^{+}] = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{١١} & \frac{١}{١١} & \frac{٤}{١١} \\ \frac{٨}{١١} & \frac{-٤}{١١} & \frac{-٥}{١١} \\ \frac{١}{١١} & \frac{٥}{١١} & \frac{-٢}{١١} \end{bmatrix}$$

$$أ \, أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-٢}{١١} & \frac{١}{١١} & \frac{٤}{١١} \\ \frac{٨}{١١} & \frac{-٤}{١١} & \frac{-٥}{١١} \\ \frac{١}{١١} & \frac{٥}{١١} & \frac{-٢}{١١} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6}{11}+\frac{16}{11}+\frac{1}{11} & \frac{3}{11}+\frac{-8}{11}+\frac{5}{11} & \frac{12}{11}\ \frac{-1}{11}\ \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11}+0+\frac{2}{11} & \frac{1}{11}-0+\frac{10}{11} & \frac{4}{11}-0-\frac{4}{11} \\ \frac{-8}{11}+\frac{8}{11}+0 & \frac{4}{11}-\frac{4}{11}+0 & \frac{16}{11}\ \frac{-5}{11}-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ى}_3$$

ويمكن استخدام مقلوب المصفوفة مباشرة فى حل المعادلات الخطية الآتية :

$$\text{أ}\ \text{س} = \text{ج}$$

وذلك بضرب طرفى المعادلة فى أ^{-1}

$$\text{أ}^{-1}\ \text{أ}\ \text{س} = \text{أ}^{-1}\ \text{ج}$$

$$\text{س} = \text{أ}^{-1}\ \text{ج} \qquad (٤٦)$$

$$\begin{Bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \vdots \\ \text{س}_\text{ن} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{ص}_{11} & \text{ص}_{12} & \cdots & \text{ص}_{\text{ن}1} \\ \text{ص}_{21} & \text{ص}_{22} & \cdots & \text{ص}_{\text{ن}2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ص}_{\text{ن}1} & \text{ص}_{\text{ن}2} & & \text{ص}_{\text{نن}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{ح}_1 \\ \text{ح}_2 \\ \vdots \\ \text{ح} \end{Bmatrix}$$

$$\text{س}_\text{و} = \frac{1}{|\text{أ}|} \left(\text{ص}_{1\text{و}}\ \text{ح}_1 + \text{ص}_{2\text{و}}\ \text{ح}_2 + \cdots + \text{ص}_{\text{ن}\text{و}}\ \text{ح}_\text{ن} \right)$$

حل المعادلات :

$$3\,\text{س}_1 + 2\,\text{س}_2 + \text{س}_3 = 10$$

$$\text{س}_1 + 2\,\text{س}_3 = 7$$

$$4\,\text{س}_1 + \text{س}_2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \text{س}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \text{س}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-4}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-20}{11} + \frac{7}{11} + \frac{24}{11} \\ \frac{80}{11} - \frac{28}{11} - \frac{30}{11} \\ \frac{10}{11} + \frac{35}{11} - \frac{12}{11} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$\therefore$ $\text{س}_1 = 1$ ، $\text{س}_2 = 2$ ، $\text{س}_3 = 3$

مرتبة المصفوفة :

تعرف مرتبة المصفوفة [ا] بأنها درجة أكبر مصفوفة مربعة جزئية من [ا] والتى محددتها لا تساوى الصفر .

إفترض الآن أن مصفوفة معينة [ا] لها مرتبة (ر) . سوف نوضح فيما يلى بأنه إذا كان لدينا مجموعة مكونة من عدد من الصفوف مقدارها (ر) من المصفوفة [ا] تكون فيما بينها مصفوفة مربعة [د] = ر × ر . فإن أى صف آخر من [ا] يكون عبارة عن توفيق خطى من هذه الصفوف (ر) .

سوف نفترض أن المصفوفة المربعة [د] بالدرجة ر فى الركن العلوى الأيمن للمصفوفة [ا] له محدده لا تساوى الصفر وأننا ندرس مصفوفة جزئية أخرى من [ا] هى المصفوفة [ك] على الصورة التالية :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{١ط}} & \cdots & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{\text{٢ط}} & \cdots & \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{١٢} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ا}_{\text{لط}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ل٢}} & \text{ا}_{\text{ل١}} \end{vmatrix} = [\text{ك}]$$

يمكن تمثيلها على النحو التالى :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{١ط}} & \cdots & \text{ا}_{\text{١ر}} & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{\text{٢ط}} & \cdots & \text{ا}_{\text{٢ر}} & \text{ا}_{١١} & \text{ا}_{١٢} \\ \cdots & \cdots & \text{ا}_{\text{رر}} & \text{ا}_{\text{٢ر}} & \text{ا}_{\text{١ر}} \\ \text{ا}_{\text{لط}} & \cdots & \text{ا}_{\text{لر}} & \text{ا}_{\text{ل٢}} & \text{ا}_{\text{ل١}} \end{vmatrix} = [\text{ك}]$$

$$= \begin{vmatrix} أ_{١ط} & \cdots & & & & & \\ أ_{٢ط} & \cdots & & & & ر & \\ أ_{مط} & \cdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ أ_{لط} & \cdots & أ_{لم} & \cdots & أ_{ل٢} & & أ_{ل١} \end{vmatrix}$$

حيث ط > م ، ل > م ، ولما كانت المصفوفة الأصلية [أ] لها مرتبة م وحسب التعريف السابق فإنه محدده مصفوفة هذه المصفوفة الجزئية ك يجب أن تساوى الصفر لجميع قيم ط ، ل > م .

وطبقاً لقاعدة كرامر المذكورة سابقا ونظراً لأن المصفوفة [ر] لها محدده لا تساوى الصفر أى أن :

| ر | ≠ صفر = | رَ | (حيث رَ معكوسة ر) . فإنه من الممكن تكوين مجموعة المعادلات الخطية التالية :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{١} أ_{١١} + \lambda_{٢} أ_{١٢} + \cdots + \lambda_{م} أ_{م١} = أ_{ل١} \\ \lambda_{١} أ_{١٢} + \lambda_{٢} أ_{٢٢} + \cdots + \lambda_{م} أ_{م٢} = أ_{ل٢} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{١} أ_{م١} + \lambda_{٢} أ_{م٢} + \cdots + \lambda_{م} أ_{مم} = أ_{لم} \end{array}\right\} \qquad (٤٨)$$

وبالتالى فإنه بالثوابت فى مجموعة المعادلات (٤٨) يمكننا أن نحدد صف من العناصر يكون توفيقا خطيا من عدد الصفوف م الأولى من المصفوفة الجزئية [ك] . والذى يحتوى على عناصر م الأولى مطابقة للعناصر م فى الصف الأخير . وافترض أن هذه التوفيقات عبرنا عنها بـ أَ لك فلكى نحصل على قيمة محددة المصفوفة ك يمكننا (طبقا لخصائص المحددات التى أوردناها سابقا) أن اطرح هذا التوفيق الخطى للصفوف م الأولى من الصف الأخير دون تغيير فى قيمة المحددة .

أى أن :

$$|\text{ل}| = \left| \begin{array}{ccc|ccc} \text{أ}_{11} & \cdots & \text{أ}_{1\text{ر}} & \cdots & & \text{أ}_{1\text{ك}} \\ \text{أ}_{12} & \cdots & \text{أ}_{2\text{ر}} & \cdots & & \text{أ}_{2\text{ك}} \\ \text{أ}_{\text{ر}1} & & \text{أ}_{\text{رر}} & & & \text{أ}_{\text{رك}} \\ \hline \text{صفر} & \cdot\cdot & \text{صفر} & & \text{أ}_{\text{لك}} & \text{أ}'_{\text{لك}} \end{array} \right|$$

ولما كانت قيمة المحددة ل تساوى (الك — أ َلك) | ر | = صفر وحيث أن | ر | ≠ صفر ، فإنه يلزم أن يكون أ َلك = الك .

أى أن الك يمكن الحصول عليها بتوفيق خطى من عناصر المصفوفة [ر] وهو المطلوب .

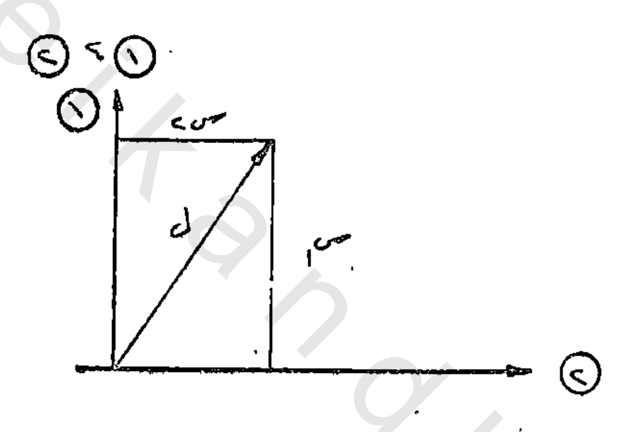
وبذلك يمكننا أن ننص على ما يلى :

(إذا كانت المصفوفة [أ] برتبة م وأمكن إيجاد مجموعة من عناصر المصفوفة عددها م × م والتى تكون فيما بينها مصفوفة جزئية مربعة [ر] غير وحيدة بدرجة م فإن أى صف آخر فى المصفوفة [أ] يمكن التعبير عنه كتوفيق خطى من هذه الصفوف م)

٨ — جبر المتجهات :

أحد المجالات الهامة التى سوف نعرض لها خلال دراستنا بحوث العمليات موضوع المتجهات ، الذى سوف ندرسه باختصار فى هذا الجزء .

(i) تسمى المصفوفة $س = \{ س_١ ، س_٢ ، \ldots ، س_ن \}$ وهى مصفوفة ذات عمود واحد بمتجه عامود . وتختصر باسم (متجة) وواضح أن $\bar{س} = (س_١ ، س_٢ ، \ldots ، س_ن)$ هى مصفوفة ذات صف واحد وهى أيضاً معكوسة $\{س\}$. فإذا كان الفراغ الإقليدى موضع الدراسة يحتوى على بعدين فقط (شكل ١) . فإن عناصر المتجه $س = \{ س_١ ، س_٢ \}$ يمكن النظر إليها على أنها تمثل إحداثيات (مركبات س) فى اتجاه المحاور (١) ، (٢) .



ويعطى طول المتجه ل بالعلاقة :

$$ل = \sqrt{س_١^٢ + س_٢^٢}$$
$$ل = \bar{س}\, س \qquad (٤٩)$$

كذلك فإنه إذا كان لدينا متجهين ق ، ف فى الفراغ الإقليدى ثنائى الأبعاد فإنه يمكن تعريف الضرب القياسى Scalar Product لكلا من ق ، ف بأنه :

$$\bar{ق}\, ف = ق_١ ف_١ + ق_٢ ف_٢ = \bar{ف}\, ق$$

ويسمى المتجهين ق ، ف بأنها متعامدات Orthagonal إذا كان ضربهم القياسي يساوى صفر فالمتجهة و$_1$ = { ١ ، صفر } ، و$_2$ {صفر ، ١} متعامدين

وتعمم الحالة السابقة فى حالة وجود أكثر من ن > ٢ . حيث يعرف الضرب القياسي للمتجهين فَ ، ن فى الفراغ متعدد الأبعاد ن فإنه :

$$ق َ ف َ = ف َ ق = ى_1 ف_1 + ى_2 ف_2 + \cdots + ى_ن ف_ن \quad (٤٩)$$

كما يعرف طول المتجة بالعلاقة :

$$ل^2 (ى) = ق َ ق = ى_1^2 + ى_2^2 + \cdots + ى_ن^2$$

وغالبا ما يرمز للضرب القياسي للمتجهين ق ، ف بالرمز (ق ، ف) .

(ii) تسمى مجموعة المتجهات ى$_1$ ، ى$_2$ ، ... ، ى$_ن$ بأنها مجموعة مستقلة إذا لم يتوفر وجود مجموعة من الثوابت حـ$_1$، حـ$_2$، ... حـ$_ن$ تحقق الشرط :

$$حـ_1 ى_1 + حـ_2 ى_2 + \cdots + حـ_م ى_م = صفر \quad (٥٠)$$

.إذا كانت المتجهات ى$_1$ ، ى$_2$ ، ... ، ى$_ن$ مستقلة فى فراغ إقليدى بأبعاد (ن) فإنه مجموعة المتجهات ف التى يمكن الحصول عليها من العلاقة :

$$ف = حـ_1 ى_1 + حـ_2 ى_2 + \cdots + حـ_م ى_م$$

لأى قيم اختيارية حـ$_1$ ، حـ$_2$ ، ... ، حـ$_م$ تسمى متجهات مولدة من المجموعة المستقلة ى$_1$ ، ى$_2$ ، ... ، ى$_م$.

إذا كان لدينا مجموعة من المتجهات عـــددها الكلى م وأن عدد المتجهات المستقلة بها هو ن حيث باستمرار م > ن . فإنه يكون لدينا عدد م — ن من المتجهات الغير مستقلة المولدة من المتجهات المستقلة الأساسية ن . وتسمى المجموعة ن بأنه تكون مجموعة أساسية أو باختصار أساسية Basis لفراغ متجهات بأبعاد ن .

وتكون مجموعة متجهات الوحدة ى التى عددها ن . والتى تعطى بالعلاقة :

$ى_1$ = { ١ ، صفر ، . . . ، صفر { ،

$ى_2$ = { صفر ، ١ ، . . . ، صفر { ،

$ى_3$ = { صفر ، صفر ، ١ ، . . . ، صفر { ،

$ى_ن$ = { صفر ، صفر ، . . . ، ١ {

بالأساسية النمطية Standard Basis

(iii) سوف ندرس الآن الشرط الهام الذى على أساسه (يمكن أن يستبدل متجه فى مجموعة متجهات أساسية عددها ه ($ن_1$ ، $ن_2$ ، . . . ، $ن_ه$) فى الفراغ الإقليدى بالبعد ه بمتجه إختيارى آخـــر ف فى نفس الفراغ الإقليدى بالبعد ه بحيث أن مجموعة المتجهات الجديدة المكونة من مجموعة متجهات ن عددها ه — ١ بالإضافة إلى المتجه الجديد ف تكون مجموعة متجهات أساسية عددها ه)

حيث أن المتجهات ($ن_1$ ، $ن_2$ ، . . . ، $ن_ه$) تكون مجموعة أساسية فإن المتجه ف يمكن التعبير عنه كتوفيق خطى من هذه المتجهات .

أى أن :

$$\text{ف} = \lambda_1 \text{ن}_1 + \lambda_2 \text{ن}_2 + \cdots + \lambda_{\text{ن}} \text{ن}_{\text{ن}} \qquad (٥١)$$

فإذا افتراضنا أن المتجه $\text{ن}_{\text{ن}}$ قد تم إزالته من المجموعة الأساسية واستبدالة بالمتجه ف فالمطلوب إثبات أن المجموعة الجديدة (ن_1 ، ن_2 ، ... ، $\text{ن}_{\text{ن}-1}$ ، ف) تكون أيضاً فيما بينها مجموعة أساسية . لإثبات ذلك نفترض العكس .

أى أنه أمكن إيجاد ثوابت δ_1 ، δ_2 ، ... ، $\delta_{\text{ن}-1}$ ، δ .

بحيث أن :

$$\delta_1 \text{ن}_1 + \delta_2 \text{ن}_2 + \cdots + \delta_{\text{ن}-1} + \delta \text{ف} = \text{صفر} \qquad (٥٢)$$

لاحظ أن $\delta \neq$ صفر وإلا كانت المجموعة ن_1 ، ... ، $\text{ن}_{\text{ن}-1}$ غير مستقلة وهذا عكس افتراضنا أن مجموعة المتجهات ن_1 ، ... ، $\text{ن}_{\text{ن}}$ مستقلة .
وبالتعويض عن ف بدلالة ن فى المعادلة (٦٢) من المعادلة (١ ه) نحصل على :

$$\delta_1 \text{ن}_1 + \delta_2 \text{ن}_2 + \cdots + \delta_{\text{ن}-1} \text{ن}_{\text{ن}-1} +$$
$$\delta[\lambda_1 \text{ن}_1 + \lambda_2 \text{ن}_2 + \cdots + \lambda_{\text{ن}-1} \text{ن}_{\text{ن}-1} + \lambda_{\text{ن}} \text{ن}_{\text{ن}}]$$
$$= \text{صفر}$$

أو :

$$(\delta_1 + \delta \lambda_1)\text{ن}_1 + (\delta_2 + \delta\lambda_2)\text{ن}_2 + \cdots +$$
$$(\delta_{\text{ن}-1} + \delta \lambda_{\text{ن}-1})\text{ن}_{\text{ن}-1} + \delta \lambda_{\text{ن}} \text{ن}_{\text{ن}} = \text{صفر} \qquad (٥٣)$$

ومعنى هذا أنه أمكن إيجاد ثوابت $(\delta_1 + \delta\lambda_1)$ ، ... ،

$(\delta_{\text{ن}-1} + \delta\lambda_{\text{ن}-1})$ ، $(\delta\lambda_{\text{ن}})$ تحقق (٥٣)

وبالتالى تكون المتجهات $ي_1$ ، ... ، $ي_ن$ غير مستقلة وهو عكس الافتراض الأصلى ، ونخلص من ذلك أن العلاقة (٥٣) غير صحيحة ، كذلك (٥٢) ، وبالتالى فإن المتجهات :

($ي_1$ ، $ي_2$ ، ... ، ف) متجهات مستقلة تكون مجموعة أساسية بأبعاد $ن$.

افترض الآن أنه لدينا متجة س يمكن التعبير عنه بمجموعة المتجهات ($ي_1$ ، $ي_2$ ، ... ، $ي_ن$) كتوفيق خطى عن العلاقة :

$$س = أ_1 ي_1 + أ_2 ي_2 + ... + أ_ن ي_ن \qquad (٥٤)$$

فإذا تغيرت المتجهات الأساسية ($ي_1$ ، $ي_2$ ، ... ، $ي_ن$) إلى ($ي_1$ ، $ي_2$ ، ... ، $ي_{ن-1}$ ، ف)

فكيف نعبر عن س فى الأساسية الجديدة ؟

لجواب هذا السؤال نوجد أولا قيمة $ي_ن$ بدلالة ف من المعادلة (٥١)

$$ي_ن = \frac{ف}{\lambda_ن} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_ن} ي_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_ن} ي_2 + ... + \frac{\lambda_{ن-1}}{\lambda_ن} ي_{ن-1} \right) \qquad (٥٥)$$

ونعوض فى (٥٤) عن قيمة $ي_ن$ بدلالة ف (٥٥) فنحصل على :

$$\text{س} = \left(\text{ا}_{1} - \frac{\text{ا}_{\text{ن}}\,\lambda_{1}}{\lambda_{\text{ن}}}\right)\text{ب}_{1} + \left(\text{ا}_{2} - \frac{\text{ا}_{\text{ن}}\,\lambda_{2}}{\lambda_{\text{ن}}}\right)\text{ب}_{2}$$

$$+ \cdots + \left(\text{ا}_{\text{ن}-1} - \frac{\text{ا}_{\text{ن}}\,\lambda_{\text{ن}-1}}{\lambda_{\text{ن}}}\right)\text{ب}_{\text{ن}-1} + \frac{\text{ف}\,\text{ا}_{\text{ن}}}{\lambda_{\text{ن}}}$$

$$\text{س} = \text{مج}_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1}\left[\text{ب}_{\text{و}}\left(\text{ا}_{\text{و}} - \lambda_{\text{و}}\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\lambda_{\text{ن}}}\right)\right] + \text{ف}\,\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\lambda_{\text{ن}}} \qquad (٥٦)$$

وهذه العلاقة يمكن تعميمها فى حالة استبدال أى متجة $\text{ب}_{\text{ر}}$ فى المجموعة ف حيث تؤدى إلى :

$$\text{مج}_{\substack{\text{و}=1\\ \text{و}\neq\text{ر}}}^{\text{ن}}\left[\text{ب}_{\text{و}}\left(\text{ا}_{\text{و}} - \lambda_{\text{و}}\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\lambda_{\text{ر}}}\right)\right] + \text{ف}\,\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\lambda_{\text{ر}}} \qquad (٥٧)$$

(٢٧) تسمى المصفوفة المكونة من عدد من الأعمدة كل عامود منها عبارة عن متجة فى مجموعة متجهات أساسية بالمصفوفة الأساسية ويهمنا بصفة خاصة إيجاد العلاقة بين مقلوب مصفوفة أساسية مكونة من المتجهات (ب_{1} ، ب_{2} ، ... ، $\text{ب}_{\text{م}}$ ، ... ، $\text{ب}_{\text{ن}}$) .

ومصفوفة أساسية أخرى مكونة من المتجهات (ب_{1} ، ب_{2} ، $\text{ب}_{\text{م}-1}$ ، ف ، $\text{ب}_{\text{م}+1}$ ، ... ، $\text{ب}_{\text{ن}}$) . أى استبدلنا فقط المتجة $\text{ب}_{\text{م}}$ فى المصفوفة الأولى بالمتجة ف فى المصفوفة الثانية .

سوف نسمى المصفوفة الأولى :

$$[ف] = \{ ب_١ ، ب_٢ ، \cdots ، ب_م ، \cdots ، ب_ن \}$$

والمصفوفة الثانية :

$$[قف] = \{ ب_١ ، ب_٢ ، \cdots ، ف ، ب_ن \}$$

وحيث أن :

$$ف = \lambda_١ ب_١ + \lambda_٢ ب_٢ + \cdots + \lambda_م ب_م + \cdots + \lambda_ن ب_ن$$

$$ب_م = -\frac{\lambda_١}{\lambda_م} ب_١ - \frac{\lambda_٢}{\lambda_م} ب_٢ + \frac{ف}{\lambda_م} - \cdots - \frac{\lambda_ن}{\lambda_م} ب_ن \quad (٥٨)$$

أو :

$$ب_م = [قف] د \quad (٥٩)$$

$$د = \{ -\frac{\lambda_١}{\lambda_م} ، -\frac{\lambda_٢}{\lambda_م} ، \cdots ، \frac{١}{\lambda_م} ، \cdots ، -\frac{\lambda_ن}{\lambda_م} \} \quad (٦١)$$

وحيث أن :

$$\left.\begin{array}{l} [ق] = [قف][ت] \\ ت = [ى_1 ، ى_2 ، ... ، ى ، ... ى_ن] \end{array}\right\} \quad (٦١)$$

فإن :

$$[قن^{-1}] = ت [قن^{-1}] \quad (٦٢)$$

مثال :

إذا علمت أن مقلوب المصفوفة ن =
$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$ن^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{١١} & \frac{١}{١١} & \frac{٤}{١١} \\ \frac{٨}{١١} & \frac{-٤}{١١} & \frac{-٥}{١١} \\ \frac{١}{١١} & \frac{٥}{١١} & \frac{-٢}{١١} \end{bmatrix}$$

وأوجد مقلوب المصفوفة :

$$[ن ف] = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ١ & ٨ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة نف حصلنا عليها باستبدال المتجة $ن_٢$ = { ٢ ٠ ١ }
بالمتجة ف = { ٦ ٨ ١ } لحل هذه المسألة نحل أولا العلاقة :

ف $= \lambda$ [ق]   أو

$\lambda =$ [ق$^{-1}$] ف

$$\begin{bmatrix} ٦ \\ ٨ \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٤}{١١} & \frac{١}{١١} & \frac{٢-}{١١} \\ \frac{٥-}{١١} & \frac{٤-}{١١} & \frac{٨}{١١} \\ \frac{٢-}{١١} & \frac{٥}{١١} & \frac{١}{١١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_١ \\ \lambda_٢ \\ \lambda_٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤+}{١١} & \frac{٨+}{١١} & \frac{١٢-}{١١} \\ \frac{٥-}{١١} & \frac{٣٢-}{١١} & \frac{٤٨}{١١} \\ \frac{١-}{١١} & \frac{٤٠+}{١١} & \frac{٦}{١١} \end{bmatrix} =$$

وباستخدام العلاقة (٦٠) ى $= \left[\frac{\lambda_٣}{\lambda_٢} \text{ ، } \frac{١}{\lambda_٢} \text{ ، } \frac{\lambda_١ -}{\lambda_٢} \right]$

$= [$ صفر ، ١ ، ٤ − $]$

ت $=$ (ى$_١$ ، ى ، ى$_٣$) $= \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ ١ & ٤ - & \text{صفر} \end{bmatrix}$

وباستخدام العلاقة (٦٢)

$$[\text{ق ن}^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-5}{11} & \frac{-4}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-5}{11} & \frac{-4}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{18}{11} & \frac{21}{11} & \frac{-1}{1} \end{bmatrix}$$

٩ ـ مسألة القيمة المميزة :

من المسائل الهامة فى جبر المصفوفات هو تحديد قيم الثوابت λ والتى يمكن بها تعيين حل غير صفرى للمعادلات المتجانسة على الصورة :

$$\begin{cases} \text{ا}_{11}\,\text{س}_1 + \text{ا}_{21}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{1\text{ن}}\,\text{س}_\text{ن} = \lambda\,\text{س}_1 \\ \text{ا}_{12}\,\text{س}_1 + \text{ا}_{22}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{2\text{ن}}\,\text{س}_\text{ن} = \lambda\,\text{س}_2 \\ \cdots \\ \text{ا}_{\text{ن}1}\,\text{س}_1 + \text{ا}_{\text{ن}2}\,\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{ن}}\,\text{س}_\text{ن} = \lambda\,\text{س}_\text{ن} \end{cases} \quad (٦٣)$$

والمسألة السابقة تعرف باسم مسألة القيمة المميزة (أيضاً تعرف باسم مسألة الجذور المميزة أو الجذور الكامنة Latent roots)

المصفوفة $[\text{ا}] = [\text{ا}_{\text{ور}}]$ ويسمى المتجه المناظر
$\text{س}_\text{ن} = \{\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \cdots ، \text{س}_\text{ر}\}$ بالمتجه المميز .

- فى كثير من الحالات تكون المصفوفة $\text{ا}_{\text{ور}}$ مصفوفة متماثلة أى أن العناصر تكون متماثلة بالنسبة للوتر الأساسى فى المصفوفة .

$$\text{ا}_{\text{ور}} = \text{ا}_{\text{رو}} \quad (٦٤)$$

وسوف نقصر دراستنا على مسألة القيمة المميزة للمصفوفات المتماثلة وباستخدام جبر المصفوفة للمعادلات (٦٣)

$$[\text{ا}]\,\text{س} = \lambda\,\text{س}$$ أى أن :

$$(\text{ا} - \lambda\,\text{ى})\,\text{س} = \text{صفر} \quad (٦٤)$$

حيث ى = (ى١ ، ى٢ ، ... ، ىن)   مصفوفه الوحدة

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & ١ & \cdots & ٠ \\ \\ ٠ & ٠ & \cdots & ١ \end{bmatrix}$$

وطبقا لدراستنا السابقة فإن المعادلة (٦٤) والتى تعبر عن مجموعه من المعادلات الخطيه المتجانسة يكون لها حل غير صفرى فى حالة واحدة فقط وهو إذا إنعدمت محددة المصفوفة [أ − λ ى]

أى أن :

$$| \text{أ} - \lambda \text{ى} | = \text{صفر} \qquad (٦٥)$$

والتى تناظر :

$$| \text{أ} - \lambda \text{ى} | = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١}-\lambda & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} & \cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢}-\lambda & \text{أ}_{٢٣} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \text{أ}_{ن١} & \text{أ}_{ن٢} & \text{أ}_{ن٣} & \cdots & \text{أ}_{نن}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (٦٦)$$

وهذه المعادلة تنص فى الواقع على أن قيم λ هى جذور كثيرة حدود Polynomial بدرجة (ن) تعرف باسم المعادلة المميزة Charactriestic equation والقيم لهذه الجذور λ١ ، λ٢ ، ... ، λن .

والتى يجب أن تكون جميعها متميزة هى الأعداد المميزة أو الجذور الكامنه للمصفوفة [أ]

ولكل جذر أو قيمة λن يصاحبه متجه محدد قل يمكن إيجاده .

فإذا فرضنا أنه لدينا جذرين مميزين λ_1 ، λ_2 وأن المتجهات المصاحبة لهذه الجذور هي ق$_1$ ، ق$_2$ فإن :

$$\begin{cases} \text{ا ق}_1 = \lambda_1 \text{ ق}_1 & (٦٧) \text{ ا} \\ \text{ا ق}_2 = \lambda_2 \text{ ق}_2 & (٦٧) \text{ ب} \end{cases}$$

فإذا ضربنا معكوسة (٦٧)ا ضرباً لاحقاً في ق$_2$ فإن :

$$(\text{ا ق}_1)' \text{ ق}_2 = \lambda_1 \text{ ق}_1' \text{ ق}_2$$

والتي هي مناظرة طبقاً لقواعد المصفوفات سالفة الذكر لـ

$$\text{ق}_1' \text{ ا}' \text{ق}_2 = \lambda_1 \text{ ق}_1' \text{ ق}_2 \qquad (٦٨)\text{ا}$$

وبنفس الطريقة إذا ضربنا (٦٧)ب ضرباً مسبقاً في ق$_1'$ لحصلنا على :

$$\text{ق}_1' \text{ ا ق}_2 = \lambda_2 \text{ ق}_1' \text{ ق}_2 \qquad (٦٨)\text{ب}$$

وبطرح (٦٨)ا من (٦٨)ب مع ملاحظة أن ا$'$ = ا في المصفوفات المتماثلة فإن :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\text{ق}_1 ، \text{ق}_2) = \text{صفر} \qquad (٦٩)$$

والمعادلة (٦٩) في الواقع تعطينا نتيجة هامة فهي تنص على ما يلي :

أي متجهين مميزين مصاحبين لجذرين مختلفين لمصفوفة مماثلة يكونا متعامدين .

كذلك يهمنا أن نذكر بعض النتائج الهامة الأخرى التي سوف نوردها فيما يلي دون إثبات :

١ — جميع الجذور المميزة للمصفوفات المتماثلة جذور حقيقية .

٢ — إذا تكرر جذر مميز عدد من المرات ط بنفس القيمة أي أنه في المعادلة (٦٦) كان لدينا معامل على الصور $(\lambda - \lambda_1)^{\text{ط}}$. فإنه يناظر λ عدد ط من المتجهات المميزة المستقلة . وأي توفيق خطي منها له نفس الخاصية .

● الأشكال التربيعية :

إن التعبير الرياضى المتجانس من الدرجة الثانية على الصورة :

$$ت = ا_{١١}س_{١}^{٢} + ا_{٢٢}س_{٢}^{٢} + ا_{٣٣}س_{٣}^{٢} + \cdots + ا_{ن ن}س_{ن}^{٢} +$$

$$٢ا_{٢١}س_{١}س_{٢} + ٢ا_{٣١}س_{١}س_{٣} + \cdots + ٢ا_{ن،ن-١}س_{ن}س_{ن-١} \quad (٧٠)$$

يسمى بالشكل التربيعى Quadrtic Form فى $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$
ونفترض فى التعبير الرياضى السابق أن قيم $ا_{و ر}$ ، $س_{و}$ تيم حقيقية . ومن المهم أن نلاحظ أنه لو فاضلنا المقدار ت جزئيا بالنسبة إلى $س_{و}$ وأجرينا التحويل التالى :

$$\frac{١}{٢}\ \frac{\partial ت}{\partial س_{و}} = حـ_{و} \quad \text{لجميع قيم } و = ١ ، ٢ ، \cdots ، ن \qquad (٧١)$$

لحصلنا على مجموعة المعادلات الخطية التالية :

$$\left.\begin{array}{l} ا_{١١}س_{١} + ا_{٢١}س_{٢} + \cdots + ا_{١ن}س_{ن} = حـ_{١} \\ ا_{١٢}س_{١} + ا_{٢٢}س_{٢} + \cdots + ا_{٢ن}س_{ن} = حـ_{٢} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ ا_{ن١}س_{١} + ا_{ن٢}س_{٢} + \cdots + ا_{ن ن}س_{ن} = حـ_{ن} \end{array}\right\} \qquad (٧٢)$$

وهى معادلات يمكن كتابتها على الصورة :

$$ا س = حـ ، \text{ حيث ا مصفوفة متماثلة كذلك فإن } ت = س' ا س \qquad (٧٣)$$

وفى كثير من التطبيقات يلزمنا التعبير عن الشكل التربيعى ت فى المعادلة (٧٠) بصورة أكثر بساطة حيث يتم التعبير عن $س_{١}$ ، ... ، $س_{ن}$ كتوفيق خطى

لمتغيرات جديدة ص تحول الشكل التربيعي ت يؤول إلى شكل تربيعي مختزل أو جمع خطي لمربعات المتغيرات الجديدة ص فقط ويسمى هذا الشكل بالشكل القانوني Canonical form .

فإذا فرضنا أنه تم التعبير عن المتجه س بدلالة ص بمعادلة المصفوفة

س = هـ ص   (٧٤)

حيث هـ مصفوفة مربعة بدرجة ن فإنه بالتعويض من (٧٤) في (٧٣) نحصل على :

ت = (هـ ص)َ أ هـ ص   (٧٥)

أو :

ت = صَ ب ص   (٧٦)

حيث :   ب = هـَ أ هـ   (٧٧)

ومن هنا نرى أن لكي تحتوي ت على قيم صر المربعة فقط يجب أن تكون ب مصفوفة وترية بمعنى أن :

هـَ أ هـ تكون مصفوفة وترية أي أن جميع عناصر ب والتي لها و ≠ ر تكون مساوية الصفر .

وسوف نثبت فيما يلي أنه إذا علمنا الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة أ فإن المصفوفة هـ التي لها الخاصة المطلوبة يمكن الحصول عليها مباشرة ذلك أنه إذا افترضنا أن :

λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ، ... ، $\lambda_{ن}$ هى الجذور المميزة للمصفوفة [ا] حيث يتم ترقيم الجذور المكررة على حده . و نفرض أن هناك مجموعة ن من متجهات الوحدة المتعامدة $ى_1$ ، $ى_2$ ، ... ، $ى_{ن}$ وواضح أنه لدينا العلاقة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} ا\,ى_1 = \lambda_1\, ى_1 \;، \\ ا\,ى_{ن} = \lambda_{ن}\, ى_{ن} \end{array}\right| \qquad (٧٨)$$

فإذا إفترضنا أن المصفوفة ب كونت بحيث أن عناصر متجهات الوحـــدة $ى_1$ ، $ى_2$ ، ... ، $ى_{ن}$ هى عناصر أعمدة المصفوفة هـ أى أن :

$$هـ = \begin{bmatrix} ى_{11} & ى_{21} & ى_{ن1} \\ ى_{12} & ى_{22} & ى_{ن2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ى_{1ن} & ى_{2ن} & ى_{نن} \end{bmatrix} \qquad (٧٩)$$

فإذا استخدمنا التعبير (٧٨) لحصلنا على :

$$ا\,هـ = \begin{bmatrix} \lambda_1 ى_{11} & \lambda_2 ى_{21} & \cdots & \lambda_{ن} ى_{ن1} \\ \lambda_1 ى_{12} & \lambda_2 ى_{22} & \cdots & \lambda_{ن} ى_{ن2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 ى_{1ن} & \lambda_2 ى_{2ن} & \cdots & \lambda_{ن} ى_{نن} \end{bmatrix}$$

أو :

$$ا هـ = هـ \begin{bmatrix} \lambda_1 & صفر & \cdots & صفر \\ صفر & \lambda_2 & صفر & صفر \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ صفر & صفر & \cdot\ \cdot & \lambda_ن \end{bmatrix} \qquad (٨٠)$$

وبضرب الطرفين ضرباً مسبقا فى هذا نحصل على :

$$هـ^{-1}\ ا هـ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \lambda_ن \end{bmatrix} = [\lambda_و\ \delta_{و ر}] \qquad (٨١)$$

والمعادلة (٨١) تؤدى إلى نفس المعادلة (٧٧) إذا كانت $هـ^{-1} = هـ^{-}$ أو

$هـ\ هـ^{-} = ى$ حيث ى مصفوفة الوحدة كما كررنا سابقا .

لأنه بفرض أن عناصر المصفوفة $هـ^{-} هـ$ هى : $هـ_{و ر}$ فإن :

$$هـ_{و ر} = مجـ\ ى_{و ر}\ ى_{ر و} \qquad (٨٢)$$

ولما كانت ى متجهات متعامدة فإن المجموع المعبر عنه فى (٨٢) يساوى الصفر ما لم تكن و = ر وفى هذه الحالة يكون المجموع هو الواحـــد الصحيح لأن المتجهات ى قيمتها الوحدة . ومن هنا نرى أن :

هـ و ر = δ و ر   أو بمعنى آخر :

هـ َ هـ = [δ و ر] = ى   (٨٢)

ونخلص من كل ما سبق إلى أن المصفوفة هـ المعرفة فى (٧٩) لها بالفعل الخاصية المطلوبة وهى بالفعل إختزال للشكل التربيعى ت .

ت = س َ ا س

بالتحويل التالى :   س = هـ ص   إلى الشكل التربيعى .

ت = ص َ ب ص   حيث ب مصفوفة وترية للجذور المميزة للمصفوفة [ا] أى :

$$ت = \lambda_1 ص_1^2 + \lambda_2 ص_2^2 + \cdots + \lambda_ن ص_ن^2$$

وتسمى المصفوفة المكونة من المتجهات المميزة بالمصفوفة المشروطة Modal Matrix للمصفوفة ا . فإذا كانت هذه المتجهات متعامدة فيما بينها و بطول يساوى الوحدة فإن المصفوفة المشروطة السابقة تكون أيضا متعامدة . من هذا يستنتج أن المصفوفة هـ السالفة الذكر هى مصفوفة متعامدة للمصفوفة ا .

وعندما تكون الجذور المميزة للمصفوفة ا مختلفة فإن المصفوفة المتعامدة المشروطة هـ تحدد تحديداً فريدا فيما عدا ترتيب الأعمدة والإشارة الجبرية الاختيارية المصاحبة لكل عامود . بينما إذا كان الجذور مرفوع لأس ($ط_ر$) فإن المتجهات المصاحبة التى عددها ط يمكن إختيارها بعدد لانهائى من الطرق .

ويهمنا أن نذكر أن المصفوفة هـ ليست هى المصفوفة الوحيدة التى تؤدي

إلى إختزال الشكل التربيعى إلى مجموعة مربعات إلا أنها المصفوفة الوحيدة التى لها خاصية $هـ' = هـ^{-1}$ والمصفوفة التى لها هذه الخاصية تسمى بالمصفوفة المتعامدة Orthogonal Matrix .

مثال : اختزال الشكل التربيعى التالى إلى شكله القانونى :

$$ت = ٢٥ س_١^٢ + ٣٤ س_٢^٢ + ٤١ س_٣^٢ - ٢٤ س_٢ س_٣ \qquad (٨٤)$$

المصفوفة [أ] لهذا الشكل التربيعى هى :

$$أ = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣٤ & ١٢ \\ ٠ & -١٢ & ٤١ \end{bmatrix}$$

والمعادلات :

[أ] س − λ س = صفر تعطى العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} (٢٥ - λ) س_١ &= صفر \\ (٣٤ - λ) س_٢ - ١٢ س_٣ &= صفر \qquad (٨٥) \\ -١٢ س_٢ + (٤١ - λ) س_٣ &= صفر \end{aligned}$$

والمعادلة المميزة :

$$\left| \text{ا} - \lambda \text{ى} \right| = \text{صفر}$$

تعطى كثيرة الحدود التالية:

$$\begin{vmatrix} (٢٥-\lambda) & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & (٣٤-\lambda) & -١٢ \\ \text{صفر} & -١٢ & ٤١-\lambda \end{vmatrix} = (٢٥ - \lambda)(\lambda^{٢} - ٧٥\lambda + ١٢٥٠)$$

ومنها :

$\lambda_{١} = \lambda_{٢} = ٢٥$ ، $\lambda_{٣} = ٥٠$. وبالتعويض لهذه القيم فى مجموعة المعادلات (٨٥) نحصل على النتائج التالية :

للجذور $\lambda_{١} = \lambda_{٢} = ٢٥$ تؤول مجموعة المعادلات ف (٨٥) إلى :

$$\text{صفر} = \text{صفر}$$

$$٩ س_{٢} - ١٢ س_{٣} = \text{صفر}$$

$$- ١٢ س_{٢} + ١٦ س_{٣} = \text{صفر}$$

والحل العام لهذه المعادلات هو $س_{١} = ح_{١}$ ، $س_{٢} = ح_{٢}$ ، $س_{٣} = \frac{٣}{٤} ح_{٢}$ حيث $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ثوابت اختيارية . وباختيار $ح_{١} = ح_{٢} = ١$ نحصل على:

$$ق_{١} = \{ ١ ، ٠ ، ٠ \} \quad ، \quad ق_{٢} = \{ ٠ ، ١ ، \tfrac{٣}{٤} \}$$

ولما كان $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ متعامدين . فكل ما يلزمنا الآن هو قسمة كل قيمة على طول ل حيث :

ل(ق١) = ١ ، ل(ق٢) = $\sqrt{(١)^٢ + (\frac{٣}{٤})^٢} = \frac{٥}{٤}$.

وبذلك يكون لدينا :

ق١ = هـ١ = {١ ، ٠ ، ٠} ، هـ٢ = $\frac{ق_٢}{ل(ق_٢)}$ = {٠ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$}

بنفس الطريقة فإن للجذور $\lambda_٣$ وبالتعويض فى مجموعة المعادلات (٨٥)

− ٢٥ س١ = صفر

− ١٦ س٢ − ١٢ س٣ = صفر

− ١٢ س٢ − ٩ س٣ = صفر

ويعطى هذا الحل : س١ = صفر ، س٢ = حـ ، س٣ = − $\frac{٤}{٣}$ حـ

وبذلك يكون ق٣ = {٠ ، ١ ، − $\frac{٤}{٣}$} ،

ل(ق٣) = $\sqrt{١ + \frac{١٦}{٩}} = \frac{٥}{٣}$ ،

هـ٣ = {٠ ، $\frac{٣}{٥}$ ، − $\frac{٤}{٥}$} وتكون المصفوفة [هـ] المطلوبة هى :

$$[هـ] = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ ٠ & \frac{٣}{٥} & -\frac{٤}{٥} \end{bmatrix}$$

أى أنه يمكننا باستخدام التحويل التالى :

س = هـ ص

أو :

$$ص_1 = س_1 \text{ ، } ص_2 = \frac{4}{5} س_2 + \frac{3}{5} س_3 \text{ ، } ص_3 = \frac{3}{5} س_2 - \frac{4}{5} س_3$$

أن نختزل الشكل التربيعى ت المعبر عنه فى المعادلة (٨٤) إلى :

$$ت = 25 ص_1^2 + 25 ص_2^2 + 50 ص_3^2$$

وبالتعويض فى العلاقة هـ' ا هـ لنتأكد من صحة ما توصلنا إليه نجد أن :

$$هـ' ا هـ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & -12 \\ 0 & -12 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

• • الأشكال الأكيدة :

إذا كان الشكل التربيعى ت = س ا س' المصاحب للمصفوفة الحقيقية المتماثلة ا غير سالب لجميع قيم سو الحقيقية ويساوى صفر عندما سو = صفر فقط لجميع قيم و = ١ ، ٢ ، ... ، ن فإن الشكل التربيعى السابق الذكر يسمى بأنه

أكيد الإيجابية Positive Definite . فإذا أمكن اختزال هذا الشكل إلى مجموع مربعات بالتحويل .

س = هـ ص حيث هـ مصفوفة غير وحيدة ، على الصورة

$$ت = \lambda_1 ص_1^2 + \lambda_2 ص_2^2 + \cdots + \lambda_ن ص_ن^2$$

فإن الشكل يكون أكيد الإيجابية إذا ـ وفقط إذا ـ كانت جميع الجذور الكامنة $\lambda_و$ ، و = ١ ، ... ، ن موجبة وبالمثل يكون أكيد السالبة Negative Definite إذا كانت جميع الجذور المميزة للمصفوفة [ا] المصاحبة للشكل سالبة .

ويمكن تعميم النتائج السابقة للمصفوفات الغير متماثلة حيث يتم تحويل المصفوفة [ا] إلى شكل وترى باستخدام العلاقة :

$$ع^{-1} ا ع = [\lambda_و \delta_{و ر}] = \lambda \qquad (٨٦)$$

حيث λ مصفوفة وترية ، $\lambda_و$ الجذور المميزة للمصفوفة ا والمصفوفة ع معرفة شريطة تتكون أعمدتها من المتجهات المميزة المصاحبة للجذور المعينة.

• خواص كثيرة الحدود وإستخدامات الجذور المميز :

تنتج المعادلة المميزة كثيرة حدود $\quad د(\lambda) = |\, ا - \lambda\, د \,|$

وهى على الصورة :

$$د(\lambda) = جـ_. \lambda^م + جـ_1 \lambda^{م-1} + \cdots + جـ_م \qquad (٨٧)$$

وتنص نظرية روث Routh theory على أنه إذا كان لدينا كثيرة الحدود

حيث $ح_٠ >$ صفر

فإن الشرط الضرورى الكافى لكى تكون جذورها $\lambda_و$ ، و = ١ ، ... ، م سالبة هو أن تكون المحددات المكونة من معاملات كثيرة الحدود بالطريقة الآتية موجبة :

$$\Delta_١ = \left[ح_١ \right] ، \Delta_٢ = \begin{vmatrix} ح_١ & ح_٣ \\ ح_٠ & ح_٢ \end{vmatrix} ،$$

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ح_١ & ح_٣ & ح_٥ \\ ح_٠ & ح_٢ & ح_٤ \\ ح_{-١} & ح_١ & ح_٣ \end{vmatrix} \qquad (٨٨)$$

... وهكذا .

لاحظ أن $ح_{-١}$ = صفر وأن أى معاملات حل لا توجد فى كثيرة الحدود توضع قيمتها تساوى الصفر .

أما قاعدة ديسكارت للاشارة : فتنص على أنه إذا كان لدينا كثيرة الحدود :

$$ى(\lambda) = \lambda^م + ح_١ \lambda^{م-١} + \cdots + \cdots ح_م \qquad (٨٩)$$

فإن عدد الجذور الموجبة يكون مساويا عدد المرات التى تتغير فيها إشارات معاملات $ح_و$ مطروحها منها عدد زوجى صحيح (ط) . فمثلا كثيرة الحدود

$$\lambda^٣ + ٣\lambda^٢ - \lambda - ٣ = (\lambda + ١)(\lambda + ٣)(\lambda - ١)$$

لها جذر موجب واحد . ونجد أن إشارة المعاملات تتغير مرة واحدة .

تعرف خ (ا) بأنه خط المصفوفة [ا] Trace ويعطى بحاصل جمع عناصر وتر المصفوفة .

$$\text{خ}(\text{ا}) = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ا}_{\text{وو}} = \text{ا}_{11} + \text{ا}_{22} + \cdots + \text{ا}_{\text{نن}} \qquad (90)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} \text{خ}(\text{ا}+\text{ب}) &= \text{خ}(\text{ا}) + \text{خ}(\text{ب}) \\ \text{خ}(\text{اب}) &= \text{خ}(\text{با}) \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

وبتطبيق العلاقة السابقة (٩١) على المعادلة (٨٦) نحصل على النتائج الهامة التالية :

$$\text{خ}(\lambda) = \text{خ}(\text{ع}^{-1}\,\text{ا}\,\text{ع}) = \text{خ}(\text{ع}^{-1}(\text{اع})) = \text{خ}((\text{اع})\,\text{ع}^{-1})$$
$$= \text{خ}(\text{ا}) \qquad (92)$$

$$\text{ولكن} \quad \text{خ}(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\text{م}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \lambda_{\text{و}} \qquad (93)$$

أي أن حاصل جمع الجذور المميزة = خ (ا) كذلك فإن :

$$|\lambda| = |\text{ع}^{-1}|\,|\text{ا}|\,|\text{ع}| = |\text{ا}| \qquad (94)$$

$$\text{ولكن} \quad |\lambda| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_{\text{م}} = \prod_{\text{و}=1}^{\text{م}} \lambda_{\text{و}} \qquad (95)$$

يمكن إيجاد العلاقة بين المعاملات $\text{حـ}_{\text{و}}$ ، و = ١ ، ... ، م في كثيرة الحدود (٨٩) ومن معاملات المصفوفة [أ] . وإذا عبرنا عن (٨٩) بالصورة :

$$\text{د}(\lambda) = \lambda^{\text{م}} + (-1)\,\Delta_1\,\lambda^{\text{م}-1} + (-1)^2\,\Delta_2\,\lambda^{\text{م}-2} + \cdots + (-1)^{\text{م}}\,\Delta_{\text{م}} \qquad (٩٦)$$

حيث :

$\Delta_{\text{و}}$ = مجموع المحددات حول وتر المصفوفة .

ولإيضاح ذلك إذا كانت :

$$\text{د}(\lambda) = \lambda^3 - \Delta_1\,\lambda^2 + \Delta_2\,\lambda - \Delta_3$$

$$\text{المصفوفة أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\Delta_1 = \text{أ}_{11} + \text{أ}_{22} + \text{أ}_{33}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} \qquad (٩٧)$$

ومن قاعدة ديكارت للاشارة ، نعلم أنه إذا كانت معاملات $ح_ر$ موجبة كلها فإن جميع الجذور المميزة تكون سالبة . ويتحقق ذلك فقط إذا كانت $ح_ر$ تغير إشارتها بادئة بالسالبية .

$$\Delta_1 < 0 \quad ، \quad \Delta_2 > 0 \quad ، \quad \Delta_3 < 0$$

... وهكذا .

وتستخدم خواص الجذور المميزة فى إختبار استقرار الأنظمة الديناميكية وفى تحقيق الشروط الكافية للنهايات القصوى للدوال ،

ثانيا : التفاضل الجزئى والنهايات العظمى والصغرى

١٠ ــ التفاضل الجزئى والكلى:

+ إذا كانت لدينا الدالة ص = د $(\text{س}_1 ، \text{س}_2)$: فما هو التغير المتوقع فى ص عندما تتغير س_1 إلى $\text{س}_1 + \triangle \text{س}_1$ مع ثبوت س_2

أى أن : $\text{س}_2 = \text{حـ}$ ، أى أن : ص = د$(\text{س}_1 ، \text{حـ})$

لإيجاد المشتقة الأولى للدالة ص = د $(\text{س}_1 ، \text{حـ})$ فهى تساوى :

$$\lim_{\triangle \text{س}_1 \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \triangle \text{س}_1 ، \text{حـ})}{\text{س}_1 + \triangle \text{س}_1 - \text{س}_1}$$

ويرمز لهذه المشتقة بالرمز $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1}$

مثال إذا كانت $\text{ص} = \text{س}_1^2 + 4\text{س}_1\text{س}_2 + 8\text{س}_2^2$. فأوجد المشتقات الجزئية الأولى لكل من س_1 ، س_2

$$\text{د}_1 = \frac{\partial \text{س}}{\partial \text{س}_1} = 2\text{س}_1 + 4\text{س}_2$$

$$\text{د}_2 = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} = 4\text{س}_1 + 16\text{س}_2$$

ويمكن إيجاد المشتقات العليا بتكرار عملية التفاضل ، فمثلا :

$$\frac{\partial}{\partial \text{س}_1}\left(\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1}\right) = \frac{\partial^2 \text{ص}}{\partial \text{س}_1^2} = 2 = \text{د}_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial س_٢}\left(\frac{\partial ص}{\partial س_١}\right) = \frac{\partial^٢ ص}{\partial س_٢ \partial س_١} = ٤ = د_{١٢}$$

$$\frac{\partial}{\partial س_١}\left(\frac{\partial ص}{\partial س_٢}\right) = \frac{\partial^٢ ص}{\partial س_١ \partial س_٢} = ٤ = د_{٢١}$$

$$\frac{\partial}{\partial س_٢}\left(\frac{\partial ص}{\partial س_٢}\right) = \frac{\partial^٢ ص}{\partial س_٢^٢} = ١٦ = د_{٢٢}$$

وعلى وجه العموم إذا كانت ص = د ($س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$) . فإنه يمكننا الحصول على عدد مقداره ن × ن من المشتقات الجزئية الثانية على الصورة :

$$د_{ور} = \frac{\partial^٢ ص}{\partial س_و \partial س_ر}$$ ويكون باستمرار $د_{ور} = د_{رو}$

حيث : ر ، و = ١ ، ٢ ، ... ، ن

ويمكننا أن نرتب المشتقات الجزئية السابقة على شكل المصفوفة التالية :

$$هـ = \begin{bmatrix} د_{١١} & د_{٢١} & \cdots & د_{ن١} \\ د_{١٢} & د_{٢٢} & \cdots & د_{ن٢} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ د_{١ن} & د_{٢ن} & \cdots & د_{نن} \end{bmatrix} \qquad (٩٨)$$

والمصفوفة السابقة تسمى بالمصفوفة الهيسية Hessian Matrix وهى مصفوفة متماثلة . فمثلا للدالة :

ص = $س_1^2 + س_2^2 + ٣ س_3^2 + ١ س_1 س_2 س_3$.

$د_{11} = ٢$ ، $د_{21} = ٦ س_3$ ، $د_{31} = ٦ س_2$

$د_{12} = ٦ س_3$ ، $د_{22} = ٤$ ، $د_{32} = ٦ س_1$

$د_{13} = ٦ س_2$ ، $د_{23} = ٦ س_1$ ، $د_{33} = ٦$

$$هـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ س_3 & ٦ س_2 \\ ٦ س_3 & ٤ & ٦ س_1 \\ ٦ س_2 & ٦ س_1 & ٦ \end{bmatrix}$$

++ إذا كانت المشتقة الجزئية تعطينا التغير فى الدالة ص = د(س$_1$ ، س$_2$) عندما يتغير أى من س$_1$ ، س$_2$ مع ثبوت المتغير الآخر فإن التفاضل الكلى يكون تقريب خطى المتغير ص عندما تتغير كلا من س$_1$ ، س$_2$ معا .

$$\triangle ص = \frac{\partial ص}{\partial س_1} \triangle س_1 + \frac{\partial ص}{\partial س_2} \triangle س_2$$

أو :

$$ء ص = \frac{\partial ص}{\partial س_1} ء س_1 + \frac{\partial ص}{\partial س_2} ء س_2 = د_1 ء س_1 + د_2 ء س_2$$

∴ ءص هو التفاضل الكلى للدالة ص . ولإيجاد التفاضلات العليا :

$$ء^2 ص = ء (ء ص) = \frac{\partial}{\partial س_1} (ء ص) ء س_1 + \frac{\partial}{\partial س_2} (ء ص) ء س_2$$

والتى يمكن بالتعويض وتجميع الحدود أن تؤول إلى :

$$\text{ء}_{٢}\text{ص} = (\text{د}_{١}\,\text{ءس}_{١} + \text{د}_{٢}\,\text{ءس}_{٢})^{٢}$$

وعموماً :

$$\text{ء}_{\text{ن}}\text{ص} = (\text{د}_{١}\,\text{ءس}_{١} + \text{د}_{٢}\,\text{ءس}_{٢})^{\text{ن}} \qquad (٩٩)$$

+++ افترضنا فيما سبق أن المتغيرات $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ متغيرات مستقلة ولكن من الممكن أن تكون هذه المتغيرات بدورها دوال فى متغير آخر مثل ع

$$\text{س}_{١} = \phi_{١}(\text{ع}) \text{ ، } \text{س}_{٢} = \phi_{٢}(\text{ع}) \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{س}_{\text{ن}} = \phi_{\text{ن}}(\text{ع})$$

فإذا إفترضنا أن المشتقة الكلية بالنسبة لـ ت هى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_{١}} \cdot \frac{\text{ءس}_{١}}{\text{ءع}} + \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_{٢}} \cdot \frac{\text{ءس}_{٢}}{\text{ءع}} + \ldots + \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_{\text{ن}}} \frac{\text{ءس}_{\text{ن}}}{\text{ءع}}$$

أى أن :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \sum_{\text{و}=١}^{\text{و}=\text{ن}} \text{د}_{\text{و}} \frac{\text{ءس}_{\text{و}}}{\text{ءع}} \qquad (١٠٠)$$

١١ — النهايات الصغرى والعظمى :

يعرف مفكوك تايلور بأنه إذا كان لدينا الدالة ϕ (س) وكانت هذه الدالة مستمرة فى الفترة س ، (س+δ) فإنه يمكن التعبير عن ϕ (س) على الصورة :

$$\phi(\text{س}+\delta) = \phi + \delta \frac{d\phi(\text{س})}{d\text{س}} + \frac{\delta^2}{!2} \frac{d^2\phi(\text{س})}{d\text{س}^2} + \cdots +$$

$$\frac{\delta^n}{!n} \frac{d^n\phi(\text{س})}{d\text{س}^n} + \cdots + \qquad (101)$$

ويستخدم مفكوك تايلور فى تحديد الشروط الكافية للحصول على نهاية عظمى وصغرى . ذلك أن الشرط الضرورى للحصول على نهاية عظمى أو صغرى لأى دالة هو أن تكون النقطة موضع الدراسة هى نقطة إستقرار
وعند هذه النقطة يجب بالضرورة انعدام المشتقة الأولى للدالة أى :

$$\frac{\partial \phi(\text{س})}{\partial \text{س}} = \text{صفر} \qquad (102)$$

ويسمى الشرط (١٠٢) بالشرط الضرورى necessary Condition، أما الشرط الكافى فهو يحدد ما إذا كانت النهاية السابقة عظمى أو صغرى . ففى حالة النهاية العظمى يجب أن تكون نقطة الإستقرار أعلى نقطـــة وبالتالى لأى قيمة مجاورة المتغير س أو س + δ تكون قيمة الدالة ϕ (س+δ) أصغر من قيمة ϕ (س) وأما فى حالة النهاية الصغرى فإن نقطة الإستقرار تكون أدنى نقطة و التالى لأى قيمة مجاورة للمتغير س عند س + δ تكون قيمة الدالة ϕ (س+δ) أكبر من ϕ (س) ، أى أن الشرط الكافى يتحدد فى الواقع بإشارة المقدار :

$$\phi(\text{س}+\delta) - \phi(\text{س}) \qquad (١٠٣)$$

ويلاحظ أنه باستخدام الشرط (١٠٢) فى مفكوك تايلور (١٠١) وإهمال الحدود الأعلى δ^2 ، مع العلم بأن $\frac{\delta^2}{2}$ مقدار موجب باستمرار لكل قيم δ الحقيقية ، فإن المقدار (١٠١) يؤول إلى :

$$\phi(\text{س}+\delta) - \phi(\text{س}) = \frac{d^2\phi(\text{س})}{d\text{س}^2}$$

وبالتالى فإن الشرط الكافى هو :

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d^2\phi(\text{س})}{d\text{س}^2} < \text{صفر} & \text{النهاية العظمى} \\ \frac{d^2\phi(\text{س})}{d\text{س}^2} > \text{صفر} & \text{النهاية الصغرى} \end{array}\right\} \qquad (١٠٤)$$

على أن حالة متغير واحد هى فى الحقيقة حالة بسيطة لا تحتاج إلى كثير من المعالجة الرياضية فإذا عممنا مفكوك تايلور فى حالة الدالة ذات المتغيرين (وذلك لاستنتاج الخصائص المميزة التى نستطيع تعميمها فيما بعد) فإن الدالة موضع الدراسة فى هذه الحالة هى $\phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)$. وتعطى قيمة $\phi(\text{س}_1 + \delta_1 ، \text{س}_2 + \delta_2)$ من العلاقة :

$$\phi(\text{س}_1+\delta_1 ، \text{س}_2+\delta_2) = \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2) + \delta_1 \frac{\partial\phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1}$$

$$+ \delta_2 \frac{\partial\phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_2} + \frac{1}{2!}\left[\delta_1^2 \frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1^2}\right.$$

$$\left. + 2\delta_1\delta_2 \frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1 ، \partial \text{س}_2} + \delta_2^2 \frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_2^2}\right] + \cdots \quad (١٠٤)$$

وحيث أن الشرط المكافىء يتحدد من إشاره المقدار

$$\phi(\text{س}_1+\delta_1 ، \text{س}_2+\delta_2) - \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2) \quad (١٠٥)$$

ضع :

$$\frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1^2} = \text{ل} ، \quad \frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1 \partial \text{س}_2} = \text{ك} ،$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_2^2} = \text{م}$$

ينتج أن المقدار بين القوسين في (١٠٤) والذى يحدد إشارة (١٠٥) يعطى بـ :

$$\tfrac{1}{2}\left[\delta_1^2 \text{ل} + 2\delta_1\delta_2 \text{ك} + \delta_2^2 \text{م}\right]$$

$$= \frac{\text{ل}}{2}\left[\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 \frac{\text{ك}}{\text{ل}} + \delta_2^2 \frac{\text{م}}{\text{ل}}\right]$$

$$= \frac{\text{ل}}{2}\left[\left(\delta_1 + \frac{\text{ك}}{\text{ل}}\delta_2\right)^2 + \frac{\delta_2^2}{\text{ل}^2}(\text{ل}\text{م} - \text{ك}^2)\right] \quad (١٠٦)$$

ونظراً لأن فى المعادلة (١٠٦) تكون المقدار $(\delta_1 + \frac{ك}{ل} \delta_2)^2$ دائماً

موجب. فإنه إذا كان فى المقدار $\frac{\delta_2^2}{ل^2}(لم - ك^2)$ كلا من ل ، م موجب

لم > ك^٢ . فإن المقدار فى القوس فى المعادلة (١٠٤) يكون موجب . وبالتالى

تكون لدينا نهاية صغرى وبالتالى يكون الشرط الكافى للحصول على نهاية صغرى

هو لم > ك^٢ أو بمعنى آخر :

$$\frac{\partial^2 \phi(س_1 ، س_2)}{\partial س_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi(س_1 ، س_2)}{\partial س_2^2} > \left[\frac{\partial^2 \phi(س_1 ، س_2)}{\partial س_1 \partial س_2}\right]^2$$

اى أن الشرط الكافى هو :

$$د_{11} > ٠ \quad د_{22} > ٠ \qquad (١٠٧)$$
$$د_{11} \; د_{22} > (د_{21})^2$$

أما إذا كان كلا من ل ، م سالب وأيضاً لم > ك^٢ فإن المقدار يكون

سالبا وبذلك يكون لدينا نهاية عظمى ويكون الشرط الكافى هو :

$$\left.\begin{array}{l} د_{11} < ٠ \quad ، \quad د_{22} < ٠ \\ د_{11} \; د_{22} > (د_{21})^2 \end{array}\right\} \qquad (١٠٨)$$

وهذا بالطبع بالإضافة إلى توفر الشرط الضرورى الا وهو $د_1 =$ صفر ،

$د_2 =$ صفر . ويمكننا الآن دراسة حالة الدالة عديدة المتغيرات :

$$ص = \phi(س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن)$$

حيث باستخدام مفكوك تايلور يمكننا الوصول إلى النتائج العامة التالية :

١ — الشرط الضرورى : $\frac{\partial ص}{\partial س_و} = د_و =$ صفر لجميع قيم و = ١ ، ٢ ،

... ، ن (١٠٩)

وينتج من هذه المعادلة عدد من المعادلات يساوى عدد المجاهيل يمكن حلها إيجاد قيم المتغيرات عند نقطة الاستقرار .

٢ — الشرط الكافى : لتحديد نوع النهاية تكون المصفوفة الهيسية المتماثلة :

$$[ه] = \begin{bmatrix} د_{11} & د_{21} & \cdots & د_{ن1} \\ د_{12} & د_{22} & \cdots & د_{ن2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ د_{1ن} & د_{2ن} & \cdots & د_{نن} \end{bmatrix}$$

ولدينا الأحوال التالية :

(ا) إذا كانت المصفوفة الهيسية [ه] أكيدة السالبة فإن نقطة الاستقرار تكون نهاية عظمى وهذا يتحقق إذا كان جميع الجذور المميزة سالبة.

(ب) إذا كانت المصفوفة الهيسية [ه] أكيدة الإيجابية فإن نقطة الاستقرار تكون صغرى . وهذا التحقيق إذا كانت جميع الجذور المميزة موجبة.

(حـ) إذا كانت المصفوفة الهيسية [ه] غير مؤكدة السالبية أو الإيجابية تكون نقطة الاستقرار تكون نقطة سرج Saddle point

مثال : أوجد نقطة الاستقرار للدالة :

$$ص = \phi(س_{١}، س_{٢}، س_{٣}) = س_{١}^{٢} + س_{٢}^{٢} + ٣ س_{٣}^{٢}$$

$$- ٢ س_{١} - ٨ س_{٢} - ١٨ س_{٣}$$

وحقق نوعها :

<u>أولا</u> : الشرط الضرورى :

$$د_{١} = \frac{\partial ص}{\partial س_{١}} = ٢ س_{١} - ٢ \qquad \therefore س_{١} = ١$$

$$د_{٢} = \frac{\partial ص}{\partial س_{٢}} = ٤ س_{٢} - ٨ \qquad \therefore س_{٢} = ٢$$

$$د_{٣} = \frac{\partial ص}{\partial س_{٣}} = ٦ س_{٣} - ١٨ \qquad \therefore س_{٣} = ٣$$

<u>ثانياً</u> : الشرط الكافى :

$$د_{١١} = \frac{\partial (٢ س_{١} - ٢)}{\partial س_{١}} = ٢$$

$$د_{١٢} = د_{٢١} = \frac{\partial (٢ س_{١} - ٢)}{\partial س_{٢}} = صفر$$

$$د_{٢١} = د_{١٣} = \frac{\partial (٢ س_{١} - ٢)}{\partial س_{٣}} = صفر$$

$$د_{٢٢} = \frac{\partial (٤س_٢ - ٨)}{\partial س_٢} = ٤$$

$$د_{٢٢} = د_{٢٢} = \frac{\partial (٤س_٢ - ٨)}{\partial س_٣} = صفر$$

$$د_{٣٣} = \frac{\partial (س_٣ - ١٨)}{\partial س_٣} = ٦$$

$$هـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

$\lambda_١ = ٢$ ، $\lambda_٢ = ٤$ ، $\lambda_٣ = ٦ > صفر$

∴ الدالة لها نهاية صغرى عند ص = (١ ، ٢ ، ٣)

١٢ – معادلة لاجرانج :

الطريقة المشروحة فى البند السابق تستخدم لإيجاد القيمة القصوى لدالة غير مقيدة — ذلك لأنه لا يتواجد قيد يحد من إختيارنا للمتغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$. فى سبيل حصولنا على القيمة القصوى للدالة ϕ ($س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$) — ولكن فى معظم الحالات العملية يكون هناك مجموعة من المتطلبات التى علينا أيضاً أن نوفرها أى نستوفيها عند حصولنا على القيمة القصوى للدالة . وواضح أن هذه الحالة الاخيرة أكثر تعقيداً .

وسوف نتعرض هنا للحالة التى تظهر فيها القيود على شكل معادلات ولتوضيح الأسلوب نعتبر أولا حالة وجود متغيرين فقط .

اعتبر الدالة $\text{ص} = \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)$ يرتبطان بالعلاقة التالية :

$$\psi(\text{س}_1 ، \text{س}_2) = \text{صفر} \qquad (١١٠)$$

وسوف نذكر هنا الطريقة المعروفة بطريقة لاجرانج للمضاعفات الغير معلومة.

إذا كان لدينا الدالة $\text{ص} = \phi(\text{س}_1 ، \text{س}_2)$. وكان لها قيمة قصوى عند $(\text{س}_1 ، \text{س}_2)$ فإن التغير لتفاضل الكلى لهذه الدالة هو :

$$\text{ء ص} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} \text{ء س}_1 + \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_2} \text{ء س}_2$$

يكون مساوياً للصفر . أى أن:

$$\text{د}_1 \text{ ء س}_1 + \text{د}_2 \text{ ء س}_2 = \text{صفر} \qquad (١١١)$$

ومنها :

$$\frac{\text{د}_1}{\text{د}_2} = - \frac{\text{ء س}_2}{\text{ء س}_1}$$

ولكن من المعادلة (٩٩) $\psi(\text{س}_1 ، \text{س}_2) = \text{صفر}$.

وبذلك فإن $\text{ء}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \text{س}_1} \text{ء س}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \text{س}_2} \text{ء س}_2 = \text{صفر}$

أو :

$$\psi_1 \text{ ء س}_1 + \psi_2 \text{ ء س}_2 = \text{صفر}$$

ومنها :

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = - \frac{ds_2}{ds_1}$$ ومنها نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$ أو :

$$\frac{\psi_1}{\Phi_1} = \frac{\psi_2}{\Phi_2} \qquad (112)$$

وتعتبر المعادلة (١١٢) تمثل الشرط الأساسى للحصول على قيمة قصوى للدالة Φ (س$_1$ ، س$_2$) بشرط القيد (١١٠) .

فإذا رمزنا بالرمز λ النسبة :

$$\lambda = - \frac{\Phi_1}{\psi_1} = - \frac{\Phi_2}{\psi_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 + \lambda\psi_1 = \text{صفر} \\ \Phi_2 + \lambda\psi_2 = \text{صفر} \\ \psi(\text{س}_1 ، \text{س}_2) = \text{صفر} \end{array}\right\} \qquad (113)$$

وبحل هذه المعادلات الثلاثة إلى المجاهيل س$_1$ ، س$_2$ ، λ نحصل على القيم المثلى (س$_1$* ، س$_2$*) ، λ* التى تعطى القيمة القصوى وتحقيق القيد المطلوب .

ويمكن الحصول على مجموعة المعادلات (١١٤) بتكوين معادلة لاجرانج على النحو التالى :

$$ل\,(س_1 ، س_2) = \phi\,(س_1 ، س_2) + \lambda\,\psi\,(س_1 ، س_2) \qquad (١١٤)$$

مفاضلة ل بالنسبة لـ (س، ، س٢) ، λ ومساواة الناتج بالصفر أى :

$$\frac{\partial ل}{\partial س_1} = صفر = \phi_1 + \lambda\psi_1$$

$$\frac{\partial ل}{\partial س_2} = صفر = \phi_2 + \lambda\psi_2$$

$$\frac{\partial ل}{\partial \lambda} = صفر = \psi\,(س_1 ، س_2)$$

وهو المطلوب .

والآن يمكننا دراسة الحالة العامة على نفس النهج السابق .

$ص = \psi\,(س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ر ، \ldots ، س_ن)$. والمطلوب إيجاد القيمة القصوى لها مع استيفاء مجموعة القيود التالية :

$$ت_و = \phi_و\,(س_1 ، س_2 ، \ldots س_ن)$$

$$و = ١ ، \ldots ، م$$

حيث أن :

$$ءص \doteq \frac{\partial ص}{\partial س_1}\,ء س_1 + \frac{\partial ص}{\partial س_2}\,ء س_2 + \ldots + \frac{\partial ص}{\partial س_ن}\,ء س_ن$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}} \, \text{ء}\text{س}_{\text{ر}} \qquad (١١٦)$$

كذلك فإن :

$$\text{ء}\psi_{\text{و}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{\partial \psi_{\text{و}}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} \, \text{ء}\text{س}_{\text{ر}} = \text{صفر} \qquad (١١٧)$$

وبضرب التغير الكلى لكل قيد فى المضاعف $\lambda_{\text{و}}$ فإن :

$$\lambda_{\text{و}} \, \text{ء}\psi_{\text{و}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \lambda_{\text{و}} \, \psi_{\text{و ر}} \, \text{ء}\text{س}_{\text{ر}} = \text{صفر} \qquad (١١٨)$$

وبإضافة (١٠٧) على (١٠٥) نحصل على :

$$\text{ء}\text{س}_{\text{ر}} \left[\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} + \cdots + \lambda_{\text{م}} \frac{\partial \psi_{\text{م}}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} \right] = 0$$

أى :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \gamma_{\text{و}} \frac{\partial \psi_{\text{و}}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} = \text{صفر} \\ & \text{ر} = ١ ، \ldots ، \text{ن} \\ & \text{ث}_{\text{و}} = \psi_{\text{و}} (\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}}) \\ & \text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م} \end{aligned} \right\} \qquad (١١٩)$$

ويمكن الحصول على مجموعة المعادلات (١١٩) بتكوين معادلة لاجرانج على الصورة :

$$ل(س ، \lambda) = \Phi(س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن)$$

$$+ \sum_{و=1}^{م} \lambda_و \left[\psi_و(س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن) - ت_و \right]$$

ثم إيجاد المشتقات الجزئية الأولى :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial ل(س ، \lambda)}{\partial س_ر} &= صفر \qquad ر = 1 ، \ldots ، ن \\ \frac{\partial ل(س ، \lambda)}{\partial \lambda_و} &= صفر \qquad و = 1 ، \ldots ، م \end{aligned} \right\} \qquad (120)$$

وتسمى الشروط (١٢٠) بأنها الشروط الضرورية للحصول على القيمة القصوى لدالة مقيدة بمعادلات .

ولإيجاد الشرط الكافى أى إختبار ما إذا كانت القيمة القصوى المحققة للشرط (١٢٠) نهاية عظمى أو صغرى يلزمنا اختبار المصفوفة الهيسية للمشتقات الثانية لدالة لاجرانج ل (س ، λ) وهى عبارة عن مصفوفة (ن + م) × (ن + م)

فإذا رمزنا بالرمز $ل_{طر}$ المشتقة الجزئية الثانية للمتغيرات ط ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، م + ن فإنه يكون لدينا المصفوفة :

$$هـ = [ل_{طر}] \qquad (121)$$

فإذا كانت هـ أكيدة السالبة . كانت النهاية عظمى أما إذا كانت أكيدة السالبة فان النهاية تكون صغرى

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $ص = س_1 \, س_2 \, س_3 + 10$ مستوفيا الشرط التالى :

$$س_1 + 2س_2 + 3س_3 = 30$$

أولا : الشرط الضرورى : نكون معادلة لاجرانج

$$ل(س، \lambda) = س_1 \, س_2 \, س_3 + 10 + \lambda \, (30 - س_1 - 2س_2 - 3س_3) \qquad (122)$$

ثم نوجد :

$$\left.\begin{aligned} ل_1 &= \frac{\partial ل(س،\lambda)}{\partial س_1} = س_2 \, س_3 - \lambda = 0 \\ ل_2 &= \frac{\partial ل(س،\lambda)}{\partial س_2} = س_1 \, س_3 - 2\lambda = 0 \\ ل_3 &= \frac{\partial ل(س،\lambda)}{\partial س_3} = س_1 \, س_2 - 3\lambda = 0 \\ ل_\lambda &= \frac{\partial ل(س،\lambda)}{\partial \lambda} = 30 - س_1 - 2س_2 - 3س_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

وبحل (١٢٣) نحصل على :

$س_1 = ١$ ، $س_2 = ٥$ ، $س_3 = \frac{١٠}{٣}$ ، $\lambda = \frac{٥٠}{٣}$

الشرط الكافي :

$$ل_{11} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_1^2} = \text{صفر}$$

$$ل_{21} = ل_{12} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_1 \partial س_2} = س_3 = \frac{١٠}{٣}$$

$$ل_{31} = ل_{13} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_1 \partial س_3} = س_2 = ٥$$

$$ل_{1\lambda} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_1 \partial \lambda} = ل_{\lambda 1} = -١$$

$$ل_{22} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_2^2} = \text{صفر}$$

$$ل_{32} = ل_{23} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_2 \partial س_3} = ١٠$$

$$ل_{2\lambda} = ل_{\lambda 2} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_2 \partial \lambda} = -٢$$

$$ل_{3\lambda} = ل_{\lambda 3} = \frac{\partial^2 ل(س،\lambda)}{\partial س_3 \partial \lambda} = -٣$$

$$ل_{٣٣} = \frac{\partial^٢ ل(س، \lambda)}{\partial س_٣^٢} = صفر$$

$$ل_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^٢ ل(س، \lambda)}{\partial \lambda^٢} = صفر$$

$$هـ = \begin{bmatrix} صفر & \frac{١}{٢} & ٥ & -١ \\ \frac{١}{٢} & صفر & ١٠ & -٢ \\ ٥ & ١٠ & صفر & -٣ \\ -١ & -٢ & -٣ & صفر \end{bmatrix}$$

ولتحديد ما إذا كانت المصفوفة هـ أكيدة السالبة أو الإيجابية أما أن نوجد الجذور المميزة أو تختبر إشارة المحيددات . وسوف نلجأ هنا إلى الطريقة الثانية حيث : $\triangle_١ =$ صفر ، $\triangle_٢ <$ صفر ، $\triangle_٣ <$ صفر

∴ النهاية عظمى :

١٣ — حساب تفاضل التغيرات : Calculus of Variation

سوف نتعرض فى دراستنا لأساليب المثلية وبحوث العمليات إلى إيجاد القيمة القصوى للدالة .

$$ع(س) = \int_{ن}^{نهـ} \phi\,[\,س(ن)\,،\,\bar{س}(ن)\,،\,ن\,]\,ءن \qquad (١٢٤)$$

والحصول على القيمة القصوى للدالة (١٢٤) تسمى أحياناً بمسألة لاجرانج وهى تشكل مجموعة من المسائل التى يمكن حلها بما يعرف بحساب تفاضل التغيرات .

فى المعادلة (١٢٤) تمثل $\bar{س}(ن) = \frac{ءس(ن)}{ءن}$ إو المشتقة الأولى للدالة س بالنسبة للزمن (ن) .

والمطلوب هنا هو إيجاد شكل الدالة س (ن) التى تحقق القيمة القصوى لدالة الدالة ع (س) . ولحل هذه المسألة سوف نفترض أنه معلوم لدينا هذه الدالة المثلى المطلوبة س* (ن) . وبالتالى سوف نعبر عن الدالة س (ن) على الصورة :

$$س(ن) = س^{*}(ن) + ت\,ل(ن) \qquad (١٢٥)$$

حيث :

ل (ن) تغيير (إنحراف) ، ت مقدار صغير ويلاحظ من (١٢٥) أن :

$$س^{*}(ن) = س(ن) \quad \Big| \quad \text{عندما } ت = \text{صفر} \qquad (١٢٦)$$

ويترتب على ذلك أن :

$$\frac{\partial ع(س)}{\partial ت}\Bigg|_{ت = \text{صفر}} = \text{صفر} \qquad (١٢٧)$$

ويتفاضل المقدار (١٢٥)

$$\bar{س}(ہ) = \bar{س}^*(ہ) + ت\bar{ل}(ہ) \qquad (١٢٨)$$

وبالتعويض من (١٢٥) ، (١٢٨) فى (١٢٤) نحصل على :

$$ع(س) = \int_{ہ.}^{ہھ} \phi\,[\,س^*(ہ) + ت\,ل\,ہ \,،\, \bar{س}^*(ہ) +$$

$$ت\bar{ل}(ہ) \,،\, ہ\,]\, د\,ہ \qquad (١٢٩)$$

فإذا فاضلنا المقدار ϕ (س (ہ) ، $\bar{س}$ (ہ) ، ہ) جزئياً بالنسبة إلى ت حصلنا على :

$$\frac{\partial \phi}{\partial ت} = \frac{\partial \phi}{\partial س} \cdot \frac{\partial س}{\partial ت} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{س}} \cdot \frac{\partial \bar{س}}{\partial ت} + \frac{\partial \phi}{\partial ہ} \cdot \frac{\partial ہ}{\partial ت} \qquad (١٣٠)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial س^*} \cdot ل(ن) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{س}^*} \cdot \bar{ل}(ن) + صفر \qquad (١٣١)$$

فإذا فاضلنا المقدار ع (س) فى (١٢٤) بالنسبة إلى ت فإن :

$$\frac{\partial ع}{\partial ت} = \int_{ہ.}^{ہھ} \frac{\partial \phi}{\partial ت} = صفر \qquad (١٣٢)$$

وبالتعويض عن $\frac{\delta \Phi}{\delta \text{ت}}$ نحصل على :

$$\cdot = \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\text{هـ}} \left\{ \frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}^*} \text{ل}(\text{ن}) + \frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}'^*} \text{ل}'(\text{ن}) \right\} \text{ءن}$$

$$= \left\{ \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\text{هـ}} \frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}^*} \text{ل}(\text{ن}) \text{ءن} \right\}$$

$$+ \left\{ \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\text{هـ}} \frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}'^*} \text{ل}'(\text{ن}) \text{ءن} \right\}$$

وباجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\text{صفر} = \left. \frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}'^*} \text{ل}_\text{ن} \right|_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\text{هـ}}$$

$$+ \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\text{هـ}} \left[\frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}^*} - \frac{\text{ء}}{\text{ءن}} \left(\frac{\delta \text{ز}\Phi}{\delta \text{س}'^*} \right) \right] \qquad (١٣٣)$$

<u>ومنها نصل على الشروط الضرورية للقيمة القصوى :</u>

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial \text{س}^{\circ}}\, \text{ل}\,(\text{ن}) = \text{صفر} \quad \text{عند } \text{ن}_{.} \text{ ، } \text{ن}_{\text{ه}} \\ &\frac{\partial \phi}{\partial \text{س}^{\circ}} - \frac{d}{d\,\text{ن}}\, \frac{\partial \phi}{\partial \text{س}^{\circ}} = \text{صفر} \end{aligned}\right\} \quad (١٣٤)$$

وتسمى $\text{ن}_{.}$ ، $\text{ن}_{\text{ه}}$ نقط البداية والنهاية . ويمكن أن نواجه أحد الشروط التالية :

١ — نقطة بداية ثابتة — نقطة نهاية ثابتة .

$\text{س}\,(\text{ن}_{.})$ ، $\text{س}\,(\text{ن}_{\text{ه}})$ معلومة . أى أن :

$$\text{ل}\,(\text{ن}_{.}) = \text{ل}\,(\text{ن}_{\text{ه}}) = \text{صفر}$$

٢ — نقطة بداية متغيرة ونهاية ثابتة

$$\left\{\begin{aligned} &\text{ل}\,(\text{ن}_{\text{ه}}) = \text{صفر} && \text{عند } \text{ن}_{.} = \text{ن}_{\text{ه}} \\ &\frac{\partial \phi}{\partial \text{س}^{\circ}} = \text{صفر} && \text{عند } \text{ن}_{.} = \text{ن}_{.} \end{aligned}\right.$$

٣ — نقطة بداية متغيرة ونقطة نهاية متغيرة

$$\frac{\partial \phi}{\partial \text{س}^{\circ}} = \text{صفر} \quad \text{عند } \text{ن}_{.} \text{ ، } \text{ن}_{\text{ه}}$$

ثالثاً : الإحتمالات والتوزيعات الإحتمالية والطرق العشوائية

١٤ — الإحتمالات :

يقصد بالتجربة عادة مجموعة من الأحداث التى تؤدى إلى عائد . فاذا أعيدت التجربة عدة مرات تحت نفس الشروط . أن امكانية حصولنا على نتيجة معينة من تجربة ما هو ما نسميه احتمال عائد ويعرف بأنه التكرار النسبي العائد من التجارب السابقة .

على سبيل المثال قد يهتم بائع أن يبيع عدد من الوحدات صفر ، ١ ، ٢ ، . . . ٩ من سلعة معينة فى الأسبوع القادم . ولتحديد هذه الاحتمالات يمكن اجراء مجموعة من التجارب تحت نفس الظروف وتأسيساً على نتائج هذه التجارب عليه تقدير الاحتمالات المطلوبة .

أفترض أنه لدينا المبيعات فى العشرين أسبوع السابقة .

الاسبوع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
المبيعات	٤	٨	٢	٦	١٢	٥	٨	٢	٥	٩	٤	٧	٦	٨	٢	١	٤	٥	٩	١٤

جدول (١)

وبذلك اذا حسبنا الاحتمالات ، بناء على التجارب المذكورة فى العشرين اسبوع السابقة . للحصول على مبيعات مقدارها صفر ، ١ ، ٢ ، . . . ١٠ .

فان احتمال بيع كمية (ك) فى الاسبوع القادم يمكن الحصول عليها بقسمة عدد الأسابيع التى يتم فيها بيع كمية مقدارها (ك) على مجموع الأسابيع التى اجريت عليها التجارب (٢٠ أسبوعا) .

وبذلك فان احتمال بيع كمية = ١٢ من الجدول السابق .

ح (١٢) = $\frac{١}{٢٠}$ وكذلك :

ح (٨) = $\frac{٣}{٢٠}$

والجدول الثانى بين الاحتمالات المختلفة مبنية على الجدول (١) السابق .

كمية المبيعات	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠ أو أكثر
التكرار النسبي (الاحتمال)	صفر	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$

وسوف نحتاج قبل الاستطراد فى دراستنا إلى التعريفات الهامة التالية :

($ت_١$) <u>نقطة العينة :</u>

كل عائد ممكن لتجربة يسمى نقطة فى العينة . فى المثال السابق تعتبر الكميات صفر ، ١ ، ٢ ، ... ، ٩ ، ١٠ أو أكثر نقط فى العينة

($ت_٢$) <u>فضاء العينة :</u>

فضاء العينة هو مجموعة النقط لكل العينات .

($ت_٣$) <u>تحديد حدث فى فضاء العينة :</u>

يعرف حدث بأنه مجموعة من النقط فى فضاء العينة . وقد تكون المجموعة فارغة (أى لا تحتوى أى نقط) كما يمكن أن تحتوى نقطة أو أكثر .

($ت_٤$) <u>وقوع حدث :</u>

يقال لحدث ما (أ) أنه وقع فى تجربة ما إذا وقعت أحد نقطة فى فضاء العينة

(ت٤) الحوادث المانعة تبادليا :

يقال لحدثين (ا) ، (ب) بأنهما مانعين تبادليا إذا لم يمكن من الممكن حدوثهما معا .

إذا كان المطلوب هو تحديد احتمال حدث (ا) أى : ح (ا) وامكن اجراء تجربة عدد كبير جداً من المرات (ن) وتكرر حدوث (ا) عدد من المرات (م) فان :

$$ح (ا) = \frac{م}{ن} \qquad (١٢٥)$$

$$ن \leftarrow \infty$$

ومن المهم أن نذكر الخواص الأساسية التالية للاحتمال :

(i) احتمال وقوع حدث معين يقع بين الصفر والواحد الصحيح
صفر < ح (ا) < ١

(ii) ح (ا) = صفر حيث ا حدث لا يمكن وقوعه

(iii) إذا كانت ح (ا) = ١ . كانت ا تحتوى جميع النقط فى فراغ العينة

(iV) ح (ا أو ب) = ح (ا) + ح (ب) حيث ا ، ب حادثين ما نعتين تبادليا

(ت٥) الاحتمالات المشروطة :

احتمال حدوث حدث (ا) شرط أن يكون حدث آخر (ب) قد وقع بالفعل يعرف بأنه :

$$\text{ع}(\text{ا}|\text{ب}) = \frac{\text{ع}(\text{ا} \cap \text{ب})}{\text{ع}(\text{ب})} \qquad (١٣٦)$$

حيث : ع (ب) > صفر

(ت$_6$) الاحتمالات المشتركة :

الاحتمال المشترك لحدثين ا ، ب هو احتمال وقوع الحدثين ا ، ب معا ويمكن تعريفه بدلالة الاحتمالات المشروطة كما يلى :

$$\text{ع}(\text{اب}) = \text{ع}(\text{ا} \cap \text{ب}) = \text{ع}(\text{ا}) \cdot \text{ع}(\text{ب}|\text{ا}) = \text{ع}(\text{ب})\, \text{ع}(\text{ا}|\text{ب}) \qquad (١٣٧)$$

(ت$_7$) الأحداث المستقلة :

يسمى حدثين (أو أكثر) بأنهما مستقلين إذا أمكن وقوع أيهم فى نفس التجربة ووقوع أى حدث لا يؤثر على وقوع الآخر . أى أن الحدثين ا ، ب يكونا مستقلين إذا كان :

$$\text{ع}(\text{ا} \cap \text{ب}) = \text{ع}(\text{ا}) \cdot \text{ع}(\text{ب}) \qquad (١٣٨)$$

وفى هذه الحالة يكون من المعادلة (١٣٦)

$$\left.\begin{aligned} \text{ع}(\text{ا}|\text{ب}) &= \text{ع}(\text{ا}) \\ \text{ع}(\text{ب}|\text{ا}) &= \text{ع}(\text{ب}) \end{aligned}\right\} \qquad (١٣٩)$$

والآن يمكننا إضافة الخواص التالية لمجموعة الخواص الأربعة المذكورة سابقة .

$$\left.\begin{aligned} \text{ع}[\text{ا} \cap (\text{أو})\, \text{ب}] &= \text{ع}(\text{ا}) + \text{ع}(\text{ب}) - \text{ع}(\text{ب})\, \text{ع}(\text{ا}|\text{ب}) \\ &= \text{ع}(\text{ا}) + \text{ع}(\text{ب}) - \text{ع}(\text{ب})\, \text{ع}(\text{ا}|\text{ب}) \\ &= \text{ع}(\text{ا}) + \text{ع}(\text{ب}) - \text{ع}(\text{ب})\, \text{ع}(\text{ا}|\underline{\text{ب}}) \end{aligned}\right\} \qquad (١٤٠)$$

(iV) إذا كان (ا) ، (ب) حدثين مستقلين فإن :

$$ح [ا ، (أو) ب] = ح (ا) + ح (ب) - ح (ا) ح (ب) \qquad (١٤١)$$

المتغيرات العشوائية :

يمكن تحديد قيم عددية المتغيرات في فضاء العينة لتجربة معينة . وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات العشوائية لأنها تأخذ قيم معينة باحتمالات معينة في فضاء العينة الوثاب أو تأخذ قيمة واقعه بين حدين باحتمال معين في فضاء العينة المستمر .

١٥ — دوال التوزيع الاحتمالى للمتغيرات الوثابة :

الدالة ى (س) التي تعطى احتمال أن يأخذ متغير عشوائى $\overline{س}$ قيمة معينة في مدى تغيره تسمى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى ($\overline{س}$) .

وبذلك فإن : ى (س) = ح ($\overline{س}$ = س) ومن خصائص دالة التوزيع الاحتمالى أن قيمتها أكبر أو تساوى صفر في مدى تغير $\overline{س}$ أى م ($\overline{س}$)

كذلك فإن مجموع قيم الدالة الاحتمالية في مدى التغير تساوى الواحد الصحيح

أى أن :

$$\left.\begin{array}{l} ى (س) \geqslant صفر \quad لجميع قيم س في م(س) \\ \sum_{م(س)} ى (س) = ١ \end{array}\right\} \qquad (١٤٢)$$

دوال التوزيع التجميعية (أو التراكمية) "المتغيرات العشوائية الوثابة :

تعطى دالة التوزيع التراكمية بالتعريف التالى :

$$د(س) = ح(\bar{س} \geqslant س) = \sum_{ص \geqslant س} ء(ص) = \sum_{ص \geqslant س} ح(\bar{س} = ص) \qquad (١٤٣)$$

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى الوثاب

تعرف بالعلاقة التالية :

$$د(س) = \sum_{م(س)} ح(\bar{س} = س)\ س = \sum_{م(س)} ء(س)\ س \qquad (١٤٤)$$

التشتت :

وهو مقياس للانتشار النسبي لقيم المتغير العشوائى وتعرف بالعلاقة التالية :

$$ت(\bar{س}) = ق\{[\bar{س} - ق(س)]^٢\}$$

$$= \sum_{م(س)} ح(\bar{س} = س)[س - ق(\bar{س})]^٢$$

$$= \sum_{م(س)} ء(س)[س - ق(\bar{س})]^٢ \qquad (١٤٥)$$

وفيما يلى بعض التوزيعات الاحتمالات الهامة للتغيرات الوثابة :

توزيع ذات الحدين :

أفترض أنه يمكن الحصول على عائد يساوى صفر أو واحد صحيح عند إجراء تجربة ما . حيث يمثل الصفر فشل ويمثل الواحد الصحيح نجاح التجربة ، أفترض أن ل هو إحتمال النجاح . وإذا أعيدت التجربة ن عدد من المرات تحت نفس الظروف . وعبرنا عن $\bar{\text{س}}$ بأنها عدد مرات النجاح فإن :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{ح}(\bar{\text{س}} = \text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} (\text{١} - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}} \qquad (\text{١٤٦})$$

$$\text{حيث} \quad \binom{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{س}}\ \underline{|\text{ن} - \text{س}}}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{١})(\text{ن} - \text{٢}) \cdots \times \text{١}}{\text{س}(\text{س} - \text{١}) \times \cdots \times \text{١}\ (\text{ن} - \text{س})(\text{ن} - \text{س} - \text{١}) \times \cdots \times \text{١}} \qquad (\text{١٤٧})$$

ويلاحظ أن :

$$\text{مج} \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ل}^{\text{س}} (\text{١} - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}} = \text{١}$$

ويمكن إثبات أن التوزيع ذات الحدين :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ن}\text{ل} \qquad (\text{١٤٨})$$

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{ن}\text{ل}(\text{١} - \text{ل}) \qquad (\text{١٤٩})$$

توزيع بواسون :

$$ى(س) = ح(\overline{س} = س)$$

$$= \frac{هـ^{-\lambda} \lambda^{س}}{س!} \text{ ، } س = صفر ، ١ ، ٢ ، ... \quad (١٥٠)$$

$$ق(س) = \lambda \quad (١٥١)$$

$$ت(س) = \lambda \quad (١٥٢)$$

التوزيع الهندسي :

إذا اجريت تجربة ورمزنا للنجاح بالرمز (١) والفشل بالرمز (صفر) ، وكان احتمال النجاح ل وعدم النجاح (١ — ل) ، وكان يهمنا أن نعرف متى يحدث الفشل لأول مرة . ورمزنا بالرمز $(\overline{س})$ لهذا المتغير فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير $(\overline{س})$ تعطى العلاقة :

$$ى(س) = ح(\overline{س} = س) = ل^{س-١}(١ — ل) \quad (١٥٣)$$

ويسمى هذا التوزيع بالتوزيع الهندسي حيث تعطى القيمة المتوقعة ق (س) بالعلاقة :

$$ق(س) = \sum_{س=١}^{\infty} س ل^{(س-١)}(١ — ل) = \frac{١}{١ — ل} \quad (١٥٤)$$

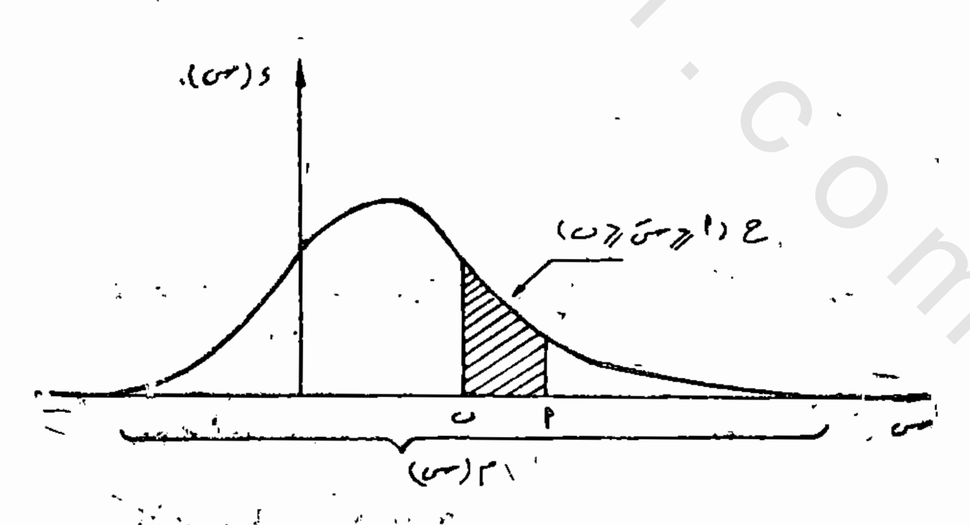
١٦ ــ دوال التوزيع الاحتمالى للمتغيرات المستمرة :

يسمى المتغير سَ بالمتغير العشوائى المستمر إذا وجدت دالة ى (س) تسمى دالة التوزيع أو الكثافة الاحتمالية للمتغير سَ

بحيث أن :

$$ح [ب \geqslant \bar{س} \geqslant ا] = \int_{ا}^{ب} ى (س) \; ى س \qquad (١٥٥)$$

ويلاحظ أنه فى حالة المتغيرات الوثابة كانت ى (س) هى إحتمال أن يأخذ سَ القيمة س بينما فى حالة المتغيرات المستمر هو احتمال أن يأخذ المتغير القيمة الواقعة بين ا ، ب أى أنه فى الواقع المساحة الواقعة تحت المنحنى ى (س) بين (ا ، ب) .



ويلاحظ أنه بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية المستمرة :

$$\int_{م(س)} د(س) \cdot دس = ١ \qquad (١٥٦)$$

القيمة المتوقعة = ق $(\bar{س})$ = $\int_{م(س)}$ س د(س) دس $\qquad$ (١٥٧)

التشتت = ت(س) = $\int_{م(س)}$ [س − ق $(\bar{س})$]^{٢} د(س) . دس $\qquad$ (١٥٨)

التوزيع التراكمي = د $(\bar{س})$ ح (س $<$ س) = $\int_{ص = -\infty}^{ص = س}$ د(ص) . دص $\qquad$ (١٥٩)

التوزيـع المعتـدل :

هو أكثر التوزيعات الاحتمالية شيوعاً حيث تعطى الكثافة الاحتمالية بدلالة القيمة المتوقعة μ والتشتت $\sigma^{٢}$ بالعلاقة :

$$د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢ط}\ \sigma} هـ^{-\frac{(س - \mu)^{٢}}{٢ \sigma^{٢}}} \qquad (١٦٠)$$

حيث ط القيمة التقريبية .

كما يعطى التوزيع التراكمى من العلاقة :

$$\text{د}(\text{س}) = \int_{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{س}-\mu}{\sigma}\right)^{2}} \qquad (١٦١)$$

يمكن تحويل المنحنى المعتدل إلى شكل أكثر بساطة يسمى بالتوزيع المعتدل الوحدى وهـــو توزيع معتدل بمتوسط (قيمة متوقعة) صفر وانشتت يساوى الواحد الصحيح . وذلك بإجراء التحويل التالى :

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma} \qquad (١٦٢)$$

توزيـع جاما :

من التوزيعات الهامة التى تستخدم حاليا بكثرة فى مجال بحوث العمليات توزيع جاما الذى يعطى بالعلاقة :

$$\text{د}(\text{ص}) = \frac{\text{ص}^{\,\text{ا}-1}\ \text{هـ}^{-\frac{\text{ص}}{\text{ب}}}}{\Gamma(\text{ا})\ \text{ب}^{\text{ا}}} \qquad (١٦٣)$$

حيث : ا ، ب قيم موجبة

وحيث :

$$\Gamma(\text{ا}) = \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{س}^{\,\text{ا}-1}\ \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{ءس} \qquad \text{ا} > \text{صفر} \qquad (١٦٤)$$

فإذا كان ا عدد صحيح فإن التكرار التكامل بالتجزئة يؤدى إلى :

$$\Gamma(\text{ا}) = \underline{|(\text{ا} - ١)} = (\text{ا} - ١)\ (\text{ا} - ٢) \times \cdots \times ١ \qquad (١٦٥)$$

ويؤول توزيع جاما إلى توزيع إيرلانج المعروف بأهميته فى نظرية صفوف الانتظار • ويمكن إثبات أنه إذا كان المتغير ص يخضع لتوزيع جاما فإن :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ق}(\text{ص}) = \text{ا ب} \\ \text{ت}(\text{ص}) = \text{ا ب}^{٢} \end{array}\right\} \qquad (١٦٦)$$

ويعتبر توزيع جاما من التوزيعات العملية الهامة حيث يمكن فى كثير من الأحوال إخضاع البيانات لأخذ توزيعات جاما إختيار مناسب للثوابت ا ، ب

ويلاحظ أنه فى الحالة التى تكون فيها ا = ١ يؤول توزيع جاما إلى التوزيع الأسى البسيط .

التوزيع الأسى :

إذا وضعنا ا = ١ ، ب = $\frac{١}{\mu}$ فى توزيع جاما لحصلنا على الدالة

$$\text{د}(\text{ص}) = \mu\ \text{هـ}^{-\mu\text{ص}} \qquad \begin{array}{l} \text{ص} \geqslant \text{صفر} \\ \mu > \text{صفر} \end{array} \qquad (١٦٧)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} ق(ص) &= \frac{١}{\mu} \\ ت(ص) &= \frac{١}{\mu^{٢}} \end{aligned}\right\} \qquad (١٦٨)$$

وتعطى الدالة التجميعية للتوزيع الاحتمالى :

$$د(ص) = \int_{س = صفر}^{س = ص} \mu هـ^{-\mu س} \, ءس = ١ - هـ^{-\mu ص}$$

<u>توزيع إرلانج :</u>

سبق أن ذكرنا أن توزيع جاما يؤدى إلى توزيع إرلانج إذا كانت ا عدد صحيح وينشأ التوزيع بجمع عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة التى يخضع كل منها لتوزيع أسى . أى أنه إذا كان $ص_١$ ، $ص_٢$ ، ... ، $ص_ك$ عدد متغيرات مقدارها ك كل منها يخضع لتوزيع أسى بمتوسط ك μ بحيث أن :

$$ى(ص_و) = ك \mu هـ^{- ك \mu ص_و} \qquad (١٧٠)$$

فإن المتغير العشوائى $ص = \sum_{و=١}^{ك} ص_و$

يكون له توزيع إرلانج بمتوسط $\frac{1}{\mu}$ وتشتت $\frac{1}{ك\mu^{2}}$ ويعطى بالعلاقة

$$د(ص) = \frac{(ك\mu)^{ك}\, ص^{ك-1}\, هـ^{-ك\mu ص}}{\underline{|ك-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} ص \geqslant صفر \\ ك \geqslant صفر \\ \mu > صفر \end{array}\right\} \qquad (١٧١)$$

حيث :

$$\left.\begin{array}{l} ق(\bar{ص}) = \frac{1}{\mu} \\ \\ ت(ص) = \frac{1}{ك\mu^{2}} \end{array}\right\} \qquad (١٧٢)$$

التوزيع اللوغاريتمي المعتدل :

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع اللوغاريتمي المعتدل بأنها :

$$د(س) = \frac{1}{ب س \sqrt{2ط}}\, هـ^{-\frac{(\text{لو } س - أ)^{2}}{2ب^{2}}} \qquad (١٧٣)$$

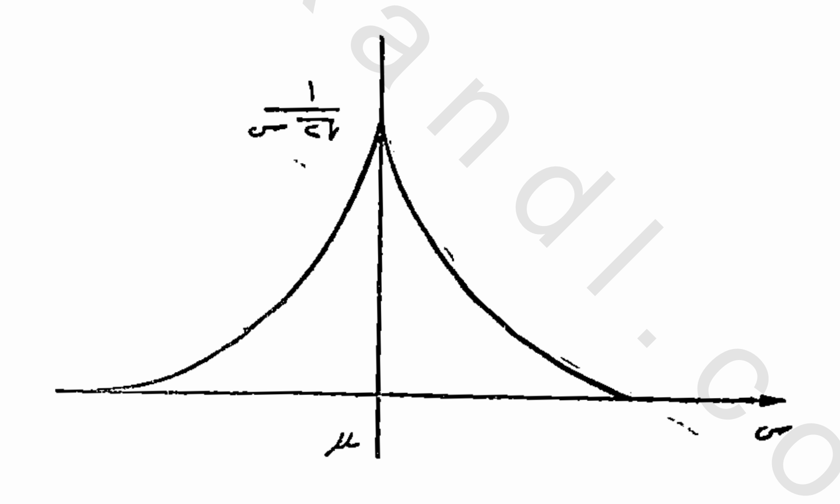
حيث أ ، ب ثوابت ؛ ويلاحظ أن مدى التوزيع اللوغاريتمي يقع بين صفر وما لا نهاية وله ذروة واحدة خلال هذا المدى . وقد سمى بهذا الأسم نظراً لأن لوغاريتم المتغير العشوائي س هو توزيع معتدل بمتوسط (أ) وانحراف معياري (ب) .

توزيع لابلاس :

هو توزيع أسى متماثل حول المنتصف وتعطى دالة الكثافة الاحتمالية من العلاقة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,\text{هـ}^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(\mu - \text{س})} & \text{حيث س} < \mu \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,\text{هـ}^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(\text{س} - \mu)} & \text{حيث س} \geqslant \mu \end{cases} \qquad (١٧٤)$$

حيث μ المتوسط ، σ الانحراف المعيارى :



توزيع لابلاس

كما تعطى الدالة التراكمية للاحتمال بالعلاقة :

$$د(س) = \begin{cases} ١ - \frac{1}{2} هـ^{-\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\,(\mu - س)} & س < \mu \\ ١ - \frac{1}{2} هـ^{-\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\,(س - \mu)} & س \geqslant \mu \end{cases} \qquad (١٧٥)$$

وفى الحالة الخاصة عندما $س = \mu + ك\,\sigma$ فإن :

$$د(\mu + ك\,\sigma) = \begin{cases} ١ - \frac{1}{2} هـ^{-\sqrt{2}\,ك} & ك \geqslant صفر \\ \frac{1}{2} هـ^{\sqrt{2}\,ك} & ك < صفر \end{cases} \qquad (١٧٦)$$

١٧ — العمليات العشوائية ومتسلسلات ماركوف :

سوف نشير فى هذا البند بإختصار إلى العمليات العشوائية المعروفة باسم متسلسلات ماركوف . وهى تتعرض أساساً لتحديد احتمالات كون النظام المدروس فى حالات محددة فى فترة زمنية لاحقة بفرض معرفة احتمالات هذه الحالات فى فترة زمنية سابقة ويلزمنا لتحديد ذلك معرفة الاحتمال المشروط للانتقال من حالة إلى أخرى فى الفترة الزمنية موضع الدراسة .

ولتوضيح المفاهيم سوف نعتبر الحالة الخاصة البسيطة التى يمكن فيها أن نعبر

عن حالة النظام المدروس بحالتين فقط أحدى هذه الحالات هى نجاح التجربة (١) والثانية هى فشل التجربة (صفر) . كذلك سوف نفترض أن التجربة تتكرر وأنه إذا كانت التجربة التى رقمها ن قد باءت بالفشل . فإن إحتمال فشل التجربة فى المحاولة القادمة (ن + ١) هو (١ — ا) وإحتمال النجاح ا (حيث ١ > ا > صفر) أما إذا كانت نتيجة التجربة فى المحاولة ن هى النجاح فإن إحتمال النجاح فى المحاولة (ن + ١) هو (ب — ١) واحتمال الفشل ب .

ويمكن فى الواقع التعبير عما سبق باختصار على شكل مصفوفة [ع] . حيث تكون مداخل هذه المصفوفة $ع_{ور}$ احتمالات الانتقال المشروطة (احتمال أن ينتقل النظام إلى الحالة ر فى الفترة (ن + ١) شرط كونه فى الحالة و فى الفترة (ن)) وفى الحالة السابقة تكون مصفوفة الانتقال .

$$ع = \begin{bmatrix} ع_{..} & ع_{.١} \\ ع_{١.} & ع_{١١} \end{bmatrix} \qquad (١٧٧)$$

حيث حسب فرضنا فى المثال السابق :

$ع_{..}$ = (١ — ا) = احتمال أن يكون النظام فى الحال صفر (الفشل) فى الفترة ن + ١ إذا كان فى الحالة صفر الفترة فى ن .

$ع_{.١}$ = ا = احتمال أن ينتقل النظام إلى الحالة ١ (النجاح) فى الفترة ن + ١ إذا كان فى الحالة صفر فى الفترة ن .

$ع_{١.}$ = ب = إحتمال أن ينتقل النظام إلى الحالة صفر فى الفترة ن + ١ إذا كان فى الحالة ١ فى الفترة ن .

$ع_{١١}$ = ١ — ب = احتمال أن يكون النظام فى الحالة ١ فى الفترة ن + ١ شرط كونه فى الحالة ١ فى الفترة ن .

الحالة (٠ م).

$$[ع] = \begin{bmatrix} (١ - ١) & ١ \\ ن & ١ - ب \end{bmatrix} \text{ ؛ الحالة (و) } \quad (١٨٧)$$

افترض الآن أن $ل^{(ن)} = [ل_{.}^{(ن)} ، ل_{١}^{(ن)}]$ حيث احتمالات وجود النظام فى الحالة ٠ ، ١ هى : $ل_{١}^{(ن)}$ ، $ل_{.}$ن على الترتيب . لذلك فإن $ل^{(ن)}$ تمثل متجهة على شكل صف تكون عناصره هى احتمالات وجود النظام فى الحالات المختلفة فى الفترة (ن) . وطبقا لتعريف مصفوفة الانتقال [ع] فإن :

$$ل^{ن+١} = ل^{ن} [ع] \quad (١٧٩)$$

$$[ل_{.}^{ن+١} ، ل_{١}^{ن+١}] = [ل_{.}^{ن} ، ل_{١}^{ن}] \begin{bmatrix} ١-١ & ١ \\ ب & ١-ب \end{bmatrix} \quad (١٨٠)$$

ومنها نحصل على :

$$\begin{cases} ل_{.}^{ن+١} = ل_{.}^{ن} (١-١) + ل_{١}^{ن} (ب) \\ ل_{١}^{ن+١} = ل_{.}^{ن} (١) + ل_{١}^{ن} (١-ب) \end{cases} \quad (١٨١)$$

وواضح من المعادلة (١٨٩) أنه بتكرار الرجوع الزمنى من ن إلى ن — ١ إلى ن — ٢ إلى صفر (أن الزمن الإبتدائى عند بداية التجربة).

فإن :

$$ل^{(١)} = ل^{(صفر)} . [ع]$$

$$ل^{(٢)} = ل^{(١)} [ع] = ل^{صفر} [ع]^{٢}$$

. . . . . .

$$ل^{(ن)} = ل^{صفر} [ع]^{ن} \quad (١٨٢)$$

والمعادلة (١٨٢) تنص أنه فى حالة وجود مصفوفة انتقال ثابتة للاحتمالات المشروطة فإن كل ما يلزم هو مصفوفة الاحتمالات الإبتدائية $ل^{صفر}$ لتحديد احتمالات النظام لأى فترة مقبلة (ن) .

ومن ضمن النتائج الهامة المعادلة (١٨٢) هو تحديد احتمالات النظام فى مرحلة الاستقرار . ومفهوم ذلك أنه إذا كان النظام يصل إلى حالة استقرار إحصائى فإن احتمالات وجوده فى أحدى الحالات لا تتغير بالزمن . أى بعد مرور فترة كافية من إجراء التجربة فإن النظام يصل إلى الاحتمال :

$$ل^{(ق)} = [ل_{.}^{(ق)} ، ل_{١}^{(ق)}] \text{ حيث :}$$

$$ل^{(ق)} = ل^{(ق)} [ع] \qquad (١٨٣)$$

والمعادلة [ع] من دراستنا السابقة للمصفوفات تؤدى إلى :

$$ل^{(ق)} [ى - ع] = صفر \qquad (١٨٤)$$

حيث ى مصفوفة الوحدة حيث تمثل (١٨٤) مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة التى يشترط وجود حل لها أن تكون محددة المصفوفة [ى - ع] تساوى الصفر أى :

$$| ى - ع | = صفر$$

ولحل المثال السابق للحصول على $ل^{ت}$ [$ل_{.}^{ق}$ ، $ل_{١}^{ق}$] بالتعويض فى (١٨٤) حيث :

$$[ى - ع] = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ - ا & ا \\ ب & ١ - ب \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ا & -ا \\ -ب & ب \end{bmatrix}$$

فإن :

$$[ل_{.}^{ق} ، ل_{١}^{ق}] \begin{bmatrix} ا & -ا \\ -ب & ب \end{bmatrix} = صفر$$

أى :

$$\left.\begin{aligned} -\text{ا} \, \text{ل}_1 \text{ق} + \text{ب} \, \text{ل}_1 \text{ق} &= \text{صفر} \\ -\text{ا} \, \text{ل}_. \text{ق} + \text{ب} \, \text{ل}_1 \text{ق} &= \text{صفر} \end{aligned}\right\} \qquad (١٨٥)$$

والمعادلتين ١٨٥ هما معادلة واحدة وحيث أنه من خصائص الإحتمالات أن مجموعها يساوى الواحد الصحيح فإن :

$$\text{ل}_.^{\text{ق}} + \text{ل}_1^{\text{ق}} = 1 \qquad (١٨٦)$$

وبحل ١٨٥ ، ١٨٦ نحصل على :

$$\text{ل}_.^{\text{ق}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}} \quad ، \quad \text{ل}_1^{\text{ق}} = \frac{1}{\text{ا} + \text{ب}}$$

وفى الحالة العامة يمكن التعبير عن المصفوفة ح بالشكل القانونى القطرى باستخدام الجذور المميزة على الصورة :

$$\text{ح} = \text{م} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{م}^{-1} \qquad (١٨٧)$$

حيث تكون م مصفوفة من أعمدة المتجهات المصاحبة للجذور المميزة حيث تعطى أعمدة المصفوفة م بـ م_1 ، م_2 حيث :

$$\text{ح} \, \text{م}_\text{ر} = \lambda_\text{ر} \, \text{م}_\text{ر} \qquad (١٨٨)$$

$$\text{ر} = 1 \text{ ، } 2$$

وباستخدام (١٨٧) يمكن التعبير عن (١٨٢) بالصورة البسيطة التالية :

$$\text{ل}^{(\text{ن})} = \text{ل}^{\text{صفر}} \text{م} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\text{ن}} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \lambda_2^{\text{ن}} \end{bmatrix} \text{م}^{-1} \qquad (١٨٩)$$

لإيجاد الجذور المميزة للمصفوفة ح فإنه يجب حل المعادلة المعطاة محددة المصفوفة :

$$\left| \text{ح} - \text{ى} \lambda \right| = \text{صفر} \qquad (١٩٠)$$

كما سبق وذكرنا فى الجزء الخاص بجبر المصفوفات :

وفى حالتنا موضوع الدراسة فإنه :

$$[\text{ع} - \text{ى}\lambda] = \begin{bmatrix} 1-\text{أ} & 1 \\ \text{ب} & 1-\text{ب} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\text{أ}-\lambda & 1 \\ \text{ب} & 1-\text{ب}-\lambda \end{bmatrix}$$

ومنها :

$$|\text{ع} - \text{ى}\,\lambda| = (1-\text{أ}-\lambda)\,(1-\text{ب}-\lambda) - \text{أ}\,\text{ب}$$

$$= \text{صفر}$$

والتى يمكن حلها لتعطى :

$$\lambda_1 = 1 \ ،\ \lambda_2 = 1-\text{أ}-\text{ب}$$

$$\text{حيث أ} + \text{ب} \neq \text{صفر} \ ،\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

وبالتعويض فى (١٨٨) نحصل على المتجهات المصاحبة لـ λ_1 ، λ_2 وتكون المصفوفة م .

$$\text{م} = \begin{bmatrix} 1 & \text{أ} \\ 1 & -\text{ب} \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على :

$$\text{م}^{-1} = \frac{1}{\text{أ}+\text{ب}} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض فى (١٨٩) :

$$\text{ل}^{(\text{ن})} = \text{م} \begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & (1 - \text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}} \end{bmatrix} \text{م}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \text{أ} \\ 1 & -\text{ب} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\text{أ} + \text{ب}} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} \end{bmatrix} + \frac{(1 - \text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}}}{\text{أ} + \text{ب}} \begin{bmatrix} \text{أ} & -\text{أ} \\ -\text{ب} & \text{ب} \end{bmatrix} \quad (191)$$

وحيث أن :

$(1 - \text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}}$. تؤول إلى الصفر بازدياد قيمة ن . فإن المقدار (١٩١) يؤدى إلى :

$$\frac{1}{\text{أ} + \text{ب}} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}} & \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}} \\ \frac{\text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}} & \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ل}_{0}(\text{ق}') & \text{ل}_{1}(\text{ق}') \\ \text{ل}_{0}(\text{ق}') & \text{ل}_{1}\,\text{ق}' \end{bmatrix}$$

٣ ـ مقدمة فى البرمجة الخطية

(٢ – ١) مفهوم البرمجة الخطية :

فى دارستنا لمعادلة لاجرانج فى المقدمة الرياضية لاحظنا أننا أوجدنا القيمة القصوى للدالة فى حالة وجود قيود على شكل معادلات الأمر الذى لا يتوافر فى كثير من الأحيان إذ أننا نواجه فى معظم التطبيقات العملية بوجود القيود على شكل متباينات حيث يكون الطرف الأيمن للمعادلة أكبر (أو أصغر) من أو يساوى الطرف الأيسر . فضلا على أن طريقة لاجرانج لا تضع قيداً على إشارة المتغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، ... $س_ن$. مع علمنا فى التطبيقات العملية (غالباً) بضرورة عدم سلبية هذه المتغيرات أى أن تكون قيمتها موجبة أو صفر أى :

$$س_ر \geqslant صفر \quad ، \quad ر = ١ ، ... ، ن .$$

هذه الإضافات المنطقية الجديدة تجعل المسألة تخرج عن نطاق طرق المثلية التقليدية إلى مجال آخر يعرف باسم البرمجة الرياضية وهو علم نشأ خلال الحرب العالمية الثانية وتطور بعدها بخطى سريعة نتيجة للتطبيقات الهامة العديدة التى يمكن أن تستخدم فيها .

والبرمجة الخطية أحد المسائل الهامة فى هذا المجال ، ويرجع الفضل فى حل مسألة البرمجة الخطية إلى جورج دانتزج العالم الامريكى فى عام ١٩٤٧ ؛ وإن كان أول من قدم للمسألة صياغة دون حل هو الرياضى الروسى كانتروفيتش .

والنموذج الرياضى العام لمسألة البرمجة الخطية هو :

أوجد مجموعة الأرقام $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن \geqslant$ صفر
بحيث تحقق المتباينات و / أو المعادلات الخطية التالية :

$$\sum_{ر=1}^{ن} ا_{و ر} س_ر \left\{ \geqslant = \leqslant \right\} ب_و$$

$$و = ١ ، ٢ ، ... ، م$$

وتجعل قيمة المعادلة الخطية :

$$ع = \sum_{ر=1}^{ن} ح_ر س_ر$$

أكبر (أصغر) ما يمكن

(١)

ويلزمنا قبل أن نستطرد فى مناقشة هذه المسألة الرياضية العام توضيح بعض المفاهيم الرئيسية بمثال بسيط .

سوف نفترض أنه لدينا وحدة إنتاجية لها طاقة إنتاجية (ب) ساعة أسبوعياً. وأن المطلوب هو تحديد الكمية س التى يمكن انتاجها من منتج معين حيث يستنفذ انتاج الوحدة من هذا المنتج الوحدة طاقة . ويمكننا التعبير عن ذلك بالصورة الرياضية :

$$ا س = ب \qquad (٢)$$

حيث يكون حل المعادلة هو $س = \frac{ب}{ا}$. وهذا ما نسميه (برنامج)

إنتاج وللبرنامج السابق يحقق شرطاً هاماً تحدد المعادلة (٢) وهو استخدام كل الطاقة المتاحة. فإذا أرخينا الشرط السابق يكون التعبير المناسب هو المتباينة :

$$ا س \geqslant ب \qquad (٣)$$

والمتباينة (٣) تنص على أنه يمكننا انتاج أى كمية بشرط الا تتعدى الطاقة الكلية • وبينما يوجد للمعادلة (٢) حل وحيد unique Solution . فإنه يوجد المعادلة (٣) مجموعة كبيرة من «البرامج» أحداها بالطبع $س = \frac{ب}{ا}$.

سوف نفترض الآن أنه يمكننا استخدام الطاقة المتاحة للوحدة الإنتاجية فى انتاج منتجين (١) ، (٢) وأرمز بالرمز $س_١$ للكمية المنتجة من المنتج الأول وبالرمز $س_٢$ للكمية المنتجة من المنتج الثانى . فإذا رمزنا بـ $ا_١$ لمقدار ما يستلزمه انتاج وحدة من المنتج الأول من الطاقة $ا_٢$ ، ما يستلزمة انتاج المنتج الثانى . فإنه يمكننا التعبير عن ذلك بالمعادلة :

$$ا_١ س_١ + ا_٢ س_٢ = ب \qquad (٤)$$

ولأى اختيار ($ص_١$) للتغير $س_١$ محصور بين الصفر ، $\frac{ب}{ا_١}$ يمكن تحديد $س_٢$ من العلاقة :

$$س_٢ = \frac{ب - ا_١ ص_١}{ا_٢}$$

كذلك لأى قيمة اختيارية ($ص_٢$) للتعبير عن $س_٢$ محصورة بين الصفر ، $\frac{ب}{ا_٢}$

يمكن تحديد $س_1$ من العلاقة :

$$س_1 = \frac{ب - أ_2 م_2}{أ_1}$$

ومرة أخرى إذا كان البرنامج لا يشترط استغلال كل الطاقة المتاحة يمكن أن يمثل بالمتباينة التالية :

$$أ_1 س_1 + أ_2 س_2 \leqslant ب$$

ولأى اختيار $س_1 = م_1$ محصور بين الصفر ، $\frac{ب}{أ_1}$ يمكن تحديد $س_2$ بأنها أى كمية محصورة بين الصفر ، $\frac{ل - أ_1 م_1}{أ_2}$.

ولأى اختيار $س_2 = م_2$ محصور بين الصفر ، $\frac{ب}{أ_2}$ يمكن تحديد $س_1$ بأنها أى كمية محصورة بين الصفر ، $\frac{ب - أ_2 م_2}{أ_1}$.

فإذا أضفنا إلى قيد الطاقة المتاحة للوحدة الإنتاجية المواد الخام الداخلة فى صنع المنتجات وافترضنا :

	المنتج الأول (١)	المنتج الثانى (٢)	الامكانيات المتاحة	
الكمية المنتجة	$س_1$	$س_2$		
احتياج الوحدة من الطاقة	$أ_{11}$	$أ_{21}$	(طاقة)	$ب_1$
احتياج الوحدة من الخامات	$أ_{12}$	$أ_{22}$	(خامات)	$ب_2$

ولكى يكون لدينا برنامج متكامل يلزمنا أخذ جميع الامكانيات المتاحة فى الاعتبار ويتحقق ذلك بالمتباينات :

$$\left.\begin{array}{l} \text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{21}\,\text{س}_2 \leq \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{12}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 \leq \text{ب}_2 \end{array}\right\} \quad (٥)$$

وعادة يكون استخدام المتباينات هـو التعبير الرياضى الشائع فى مسائل البرمجة الخطية ذلك لأنه ليس من الضرورى أن يكون البرنامج الأمثل هو الذى يحقق الاستغلال التام لجميع الامكانيات المتاحة .

من المهم أن نلاحظ أن كل متباينة أو معادلة تشكل فى الواقع قيداً على اختيار المتغيرات والتى هى فى حالتنا قيم س_1 ، س_2 للكميات المنتجة . لذلك فإن التعبير الشائع فى مسائل البرمجة الخطية هو تسمية هذه المتباينات بالقيود .

والنموذج (٥) ينقصه قيد أساسى فى مسألة البرمجة الخطية وهو قيد عدم السلبية حيث من غير المنطقى أن تكون أى من س_1 ، س_2 سالبة ومن المهم أن نذكر للقارىء أن مسائل البرمجة الخطية لا تشترط أن تكون المتباينات من نوع واحد فى المسألة الواحدة فالجمع بين اتجاه المتباينات أو المعادلات وارد فى مسائل البرمجة الخطية . وفى مثالنا السابق مثلا قد يشترط قسم المبيعات نتيجة لظروف التعاقد مع العملاء أن لا يقل إنتاج الوحدات المنتجة من س_2 عن حد أدنى هو ب_3 مثلا وبإضافة هذا القيد إلى القيود السابقة له نحصل على النموذج التالى :

$$\left.\begin{array}{l} \text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{21}\,\text{س}_2 \leq \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{12}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 \leq \text{ب}_2 \\ \text{س}_2 \geq \text{ب}_3 \end{array}\right\} \quad (٦)$$

بالرغم من تضمن النموذج (٦) لكل القيود إلا أنه لا يتيح لنا طريقة

نستطيع بها أن نفصل برنامجا على آخر . لذلك يلزمنا أن نضيف دالة قياس يمكننا بها أن نفضل برنامجا على آخر . لذلك يلزمنا بالإضافة إلى ماسبق دالة قياس يمكن بها أن تقيس ما يحققه كل برنامج وبالتالى نستطيع أن نفاضل برنامجا على آخر . وهى ما نسميه بدالة الهدف . فمثلا إذا أمكننا فى المسألة المطروحة أمامنا تحديد هامش الربح من إنتاج وحدة من المنتج الأول حـ_1 ووحدة من المنتج الثانى حـ_2 . فإن الربح الكلى يعطى من العلاقة :

$$\text{ح} = \text{حـ}_1\,\text{س}_1 + \text{حـ}_2\,\text{س}_2 \qquad (٧)$$

ويكون المطلوب هنا هو جعل ع أكبر ما يمكن على استيفاء مجموعة القيود (٦) وتكون مسألة البرمجة الخطية على الصورة :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{عظم ع} = \text{حـ}_1\,\text{س}_1 + \text{حـ}_2\,\text{س}_2 \\ \text{مستوفيا} \\ \text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{21}\,\text{س}_2 \leqslant \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{12}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 \leqslant \text{ب}_2 \\ \text{س}_2 \geqslant \text{ب}_3 \\ \text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2 \geqslant \text{صفر} \end{array}\right. \qquad (٨)$$

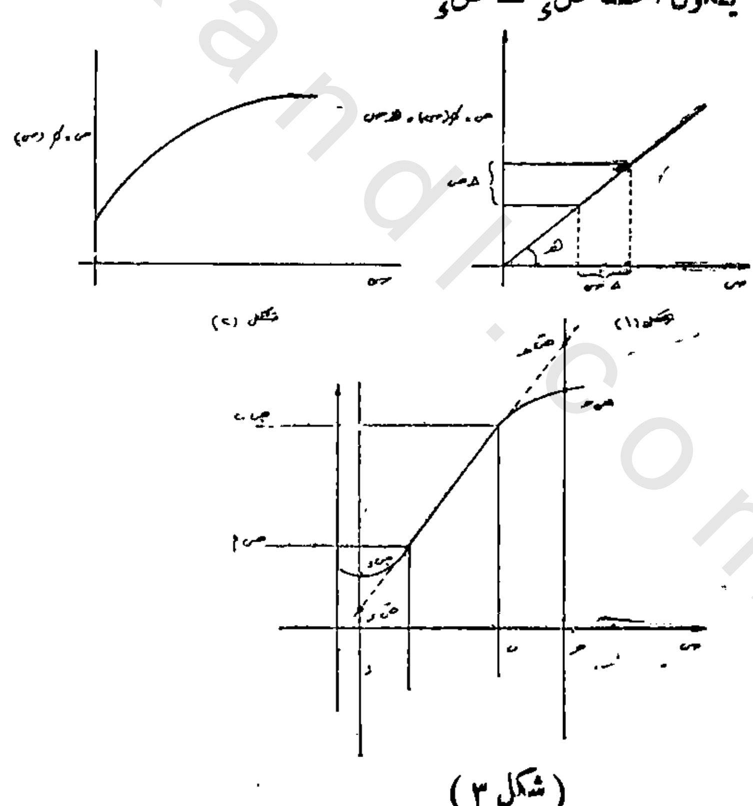
ومما سبق نستطيع أن نلخص الملامح الرئيسية التى تميز مسائل البرمجة الخطية

١ — دالة الهدف : يفترض إمكانية التعبير عن العائد بدالة هدف يمكن بها قياس مختلف البدائل .

٢ — القيود : يفترض امكانية تحديد وصياغة مجموعة القيود المحددة لإختيار المتغيرات على شكل متباينات أو معادلات :

٣ — الخطية : جميع العلاقات الرياضية السائدة (١) ، (٢) خطية .

وتعبير الخطية المستخدم هو تعبير فنى وليس اقتصادى أو هندسى ، وهو عبارة عن إفتراض أن الظاهـرة التى نقوم بدراستها تتغير بطريقة خطية (فى حالة الدالة فى متغير واحد يمكن تمثيلها على شكل مستقيم) . فإذا كان لدينا علاقة بين ص ، س على شكل الدالة ص = φ (س) . فإن هذه العلاقة تسمى خطية فقط فى الحالة التى يمكن فيها تمثيل العلاقة بين ص ، س على شكل خط مستقيم . كما هو مبين فى شكل (١) . بينما فى شكل (٢) نجد أن العلاقة بين ص ، س هى دالة غير خطية ولا يمكننا أن نقربها إلى صورة خطية . وشكل (٣) يبين أحد الحالات الغير خطية التى يمكن تقريبها إلى معادلة خطية فى الفترة ا < س < ب . بينما عندما تكون س = حـ يكون الخطـأ من القيم الحقيقية للمتغير ص والقيمة التقريبية بإفتراض الخطية هو (صحـ — صَحـ) ، وعندما تكون س = ى يكون الخطأ صى — صَى



شكل (١)

شكل (٢)

(شكل ٣)

وفى كثير من الأحيان يمكننا افتراض الخطية المباشرة بينما فى بعض الحالات الأخرى يجب التأكد من صحة هذا الافتراض بإجراء تحليل الارتباط .

وتحظى دالة الهدف والتى تكون فى كثير من الأحيان تمثل دوال التكلفة أو الربح باهتمام كبير فى هذا أ مكن حيث تكون دوال الهدف غير خطية على شكل دوال محدبة أو مقعرة — فإذا قربناها فى مدى وقوع المتغيرات إلى دوال خطية كما هو مبين فى شكل (٤) . حيث أمكن الاستعاضة عن الشكل الغير خطى ص = φ (س) إلى مجموعة من الدوال الخطية .

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{هـ}_1\text{س} & \text{ا} \leq \text{س} < \text{ب} \\ \text{هـ}_2\text{س} & \text{ب} \leq \text{س} \leq \text{حـ} \\ \text{هـ}_3\text{س} & \text{حـ} \leq \text{س} \leq \text{د} \end{cases} \qquad (٩)$$

شكل (٤)

إن إفتراض الخطية من الافتراضات المقيدة الرئيسية فى تطبيق البرمجة الخطية ويلزم فى بعض الأحيان إلى استخدام بعض المهارة الرياضية لإجراء التقريب المناسب . على أنه من الجانب الآخر إذا أمكن التوصل إلى الصيغة الخطية المناسبة للمسألة فإن حل المسألة بعد ذلك يكون مباشراً .

(٢ — ٢) الطريقة البيانية لحل مسألة البرمجة الخطية :

إذا كان عدد من المتغيرات فى مسألة البرمجة الخطية أثنين فقط . أمكن فى هذه الحالة حل مسألة البرمجة الخطية بيانيا . وبالرغم من أنه من النادر أن تكون مسألة البرمجة الخطية فى متغيرين فقط إلا أن الطريقة البيانية تساعد فى فهم مسألة البرمجة الخطية عموما . ولهذا فمن المفيد مناقشتها وتعميم بعض نتائجها ، وذلك باستخدام محورين أحدهما يمثل المتغير الأول والآخر يمثل المتغير الثانى وتوقع القيود على هذا المستوى لنحدد ما يسمى بمنطقة الامكانيات وتكون النقط الواقعة فى هذه المنطقة وحدودها هى النقط التى تختار الحل منها : وبتوقيع دالة الهدف فى نفس المستوى وتحريكها بحيث تمس أبعد نقطة فى حل مسألة التعظيم أوأقرب نقطة فى حالة مسألة التدنية نحصل على الحل الأمثل .

والصورة العامة لمسألة البرمجة الخطية فى متغيرين هى . المطلوب :

تعظيم :

$$ع = ح_{١} س_{١} + ح_{٢} س_{٢} \quad \text{مستوفيا}$$

$$\sum_{ر=١}^{٢} أ_{و ر} س_{ر} \geqslant ب_{و} \qquad و = ١ ، ٢ ، ... ، م \qquad (١٠)$$

$$س_{١} ، س_{٢} \geqslant \text{صفر}$$

وتسمى المسألة (١٠) بمسألة التعظيم أو :

تدنية

$$
(11)\begin{cases}
ع = حـ_١ س_١ + حـ_٢ س_٢ & \text{مستوفيا} \\
\sum_{ر=١}^{ر=٢} أ_{و ر} س_{و ر} \geqslant ب_و \quad و = ١، ٢، ٠٠٠، م \\
س_١ ، س_٢ \geqslant صفر
\end{cases}
$$

حيث تسمى (١١) بمسألة التدنية

ولتوضيح مفهوم البرمجة الخطية ما تنطوى عليه من نتائج تعتبر أساساً للطريقة العامة سوف تعبير المسألة (٩) والتى هو المطلوب :

تعظيم

$$ع = حـ_١ س_١ + حـ_٢ س_٢ \quad \text{مستوفيا}$$

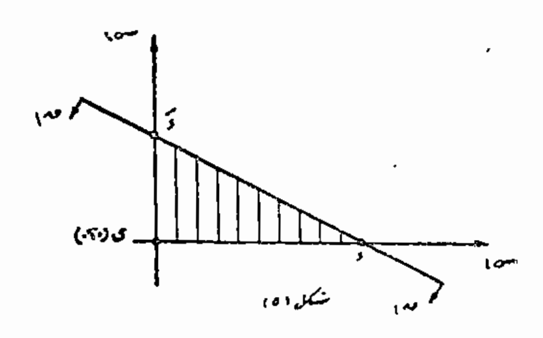
$$ق_١ = أ_{١١} س_١ + أ_{٢١} س_٢ \leqslant ب_١$$

$$ق_٢ = أ_{١٢} س_١ + أ_{٢٢} س_٢ \leqslant ب_٢$$

$$ق_٣ = \quad س_٢ \leqslant ب_٣$$

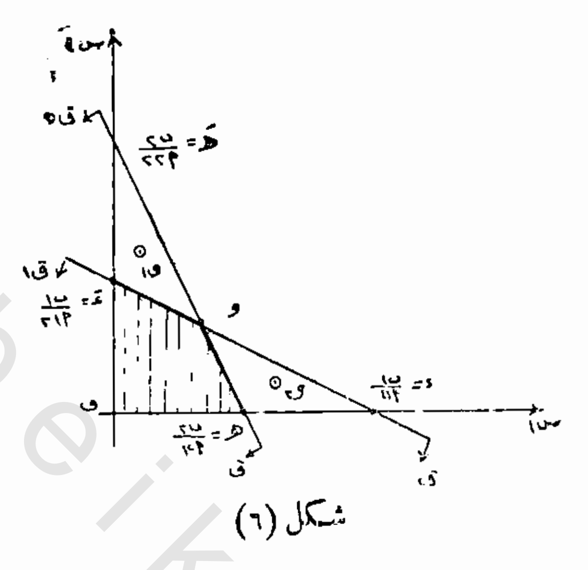
<u>خطوات العمل :</u>

نستحدث مستوى ($س_١ - س_٢$) ونوقع عليه القيد الأول $أ_{١١} س_١ +$ $أ_{٢١} س_٢ \leqslant ب_١$ شكل (د) .



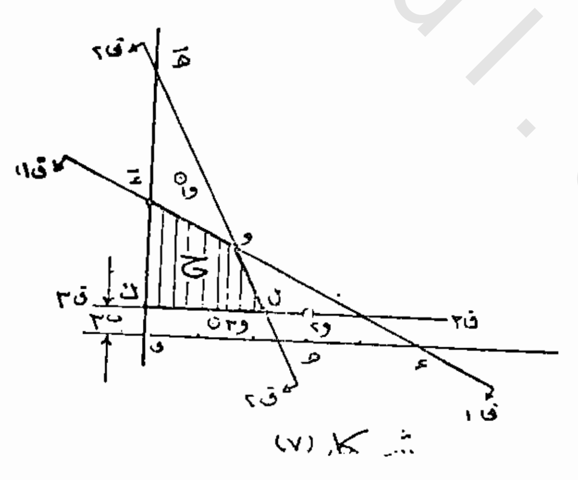
أى نقطة واقعة على الخط ق١ — ق٢ تحقق المعادلة أ١١ س١ + أ٢١ س٢ = ب٢ . ويتحدد الخط بتحديد النقط ى ، ى َ على الترتيب وذلك بوضع س٢ = صفر عند (ى) ومنها س١ = ب١ / أ١١ ، س١ = صفر (ى َ) ومنها س٢ = ب١ / أ٢١

أى نقطة واقعة على المستوى النصفى المفتوح فى إتجاه الأسهم تحقق المتباينة أ١١ س١ + أ٢١ س٢ < ب١ بما فى ذلك الخط ق١ — ق١ . بينما تحدد المنطقة المظللة ى ى َ ى النقط التى تستوفى بالإضافة إلى ما سبق شرط عدم السلبية أى س١ ، س٢ ≥ صفر وبإضافة القيد الثانى أ١٢ س١ + أ٢٢ س٢ ≤ ب٢ على المستوى السابق نحصل الخط ق٢ ق٢ فى شكل (٦) بينما تحدد المنطقة هـ هـ َ ى المنطقة التى تفى بهذا القيد مع شرط عدم السلبية . لاحظ أن النقط و١ تحقق القيد الأول بينما تحقق القيد الثانى بينما النقطة (و٢) تحقق القيد الثانى لا تحقق القيد الأول بينما تحقق المنطقة المظللة ى ى َ وهـ القيود ق١ ، ق٢ وقيد عدم السلبية .



شكل (٦)

وبإضافة القيد الثالث شكل (٧) تنكمش منطقة الامكانيات (ح) المحددة بالشكل ل ل و ى . حيث تسمى النقطة ح بمنطقة الامكانيات لأى أى نقطة داخلها أو على حدودها تعتبر حلا ممكنا المسألة المعبر عنها بمجموعة القيود المطروحة أمامنا .



شكل (٧)

فإذ انتقلنا إلى دالة الهدف والتي هي على الصورة :

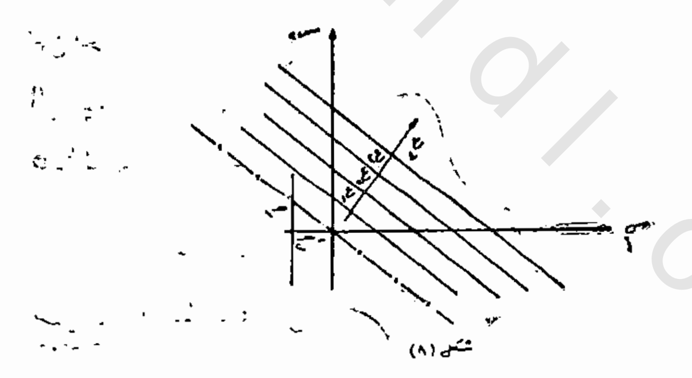
$$ع = حـ_١ س_١ + حـ_٢ س_٢$$

وبالطبع بزيادة ع كبرامتر يزيد الجزء المقطوع من محورى س_1 ، س_2 أى تنتقل الدالة موازية لنفسها فى إتجاه السهم فى شكل (٨) ولتحديد ميل دالة الهدف فإنه لأى إختيار محدد $\text{ع} = \text{ح}_1 \text{س}_1 + \text{ح}_2 \text{س}_2$ وعندما $\text{س}_1 = 0$

فإن $\text{س}_2 = \frac{\text{ع}}{\text{ح}_2}$ ، عندما $\text{س}_2 = 0$ فإن $\text{س}_1 = \frac{\text{ع}}{\text{ح}_1}$ أى أن $\frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} = \frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}$ ويمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة من التغير الكلى للدالة ع

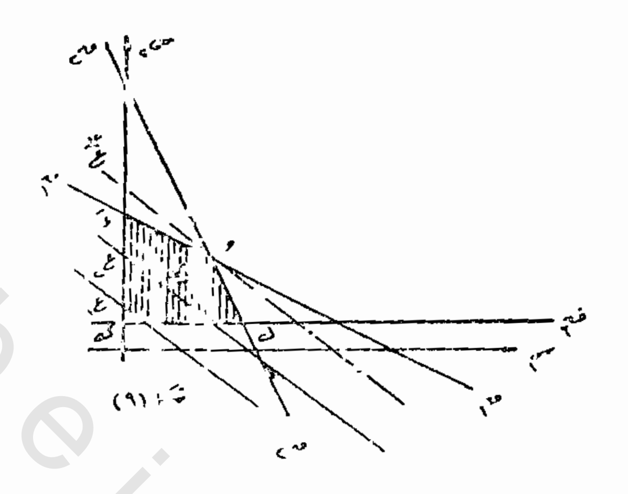
$$d\text{ع} = \text{صفر} = \text{ح}_1 \frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}} + \text{ح}_2 \frac{\partial \text{س}}{\partial \text{ع}} \text{ ، ومنها } \frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{س}_2} = -\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}$$

وهو الميل المحدد بالخط المنقط فى شكل (٨) .



شكل (٨)

واضح أنه إذا رسمنا عائلة من المنحنيات ع ذات الميل $\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}$ وحركناها موازية لنفسها فى إتجاه السهم على نفس المستوى المحدود عليه منطقة الامكانيات بحيث يمس أبعد نقطة فى المنطقة فإننا نحصل على الحل الأمثل الذى يفى بالقيود ويعظم دالة الهدف فى شكل (٩) .



ويعطى الحل الأمثل بالنقطة و = (س°₁ ، س°₂) والتى تناظر أعلى قيمة ممكنة لدالة الهدف ع° وفى ظل القيود الموضوعة .

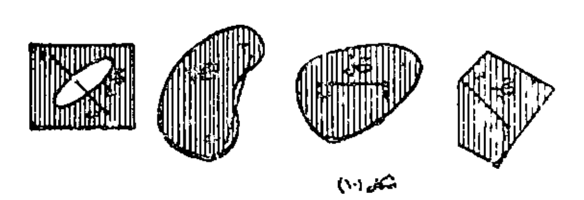
وأهم ما يجب أن نلفت النظر إليه هنا هو أن الحل الأمثل الذى حصلنا عليه كان أحد أركان المنطقة ح والمحدودة بالحدود ى و ل ك . والتى تسمى بالنقطة الركنية أو القصوى لمنطقة الإمكانيات ح المحـــددة بمنطق القيود وهى خاصية عامة نتيجة لشكل المنطقة ح والتى تعرف رياضيا بالمنطقة المحدبة .

(٢ — ٣) المنطقة المحدبة والسمبلكس : تسمى المنطقة ح بأنها منطقة محدبة . إذا استوفت الشروط الأساسية التالية :

١ — كانت جميع حدود المنطقة متجهة إلى داخل المنطقة .

٢ — كانت المنطقة خالية من الفراغات

وتأسيساً على ذلك فإنه فى شكل (١٠) المنطقة ح₁ ، ح₂ مناطق محدبة بينما ح₃ ، ح₄ مناطق غير محدبة .



شكل (١٠)

ويمكن التعبير عن الشرطين (١) ، (٢) رياضيا على النحو التالى :

إذا كان لدينا نقطتين ا ، ب واقعتين فى المنطقة المحدبة فإن الخط الواصل بينهما يقع بتمامه فى المنطقة ولما كانت النقط الواقعة على الخط ا ب هى مجموعة النقط التى تحقق حـλ = λ ا + (١ – λ) ب لجميع قيم λ الواقعة من صفر والوحد الصحيح أى ١ ⩾ λ ⩾ صفر . فإذا وقعت جميع نقط الخط حـλ فى المنطقة ح كانت المنطقة ح منطقة محدبة

وتفيد خصائص المنطقة المحدبة فى فهم نظريات البرمجة الخطية وأهمها أن الحل الأمثل يكون دائماً نقطة قصوى (ركنية) للمنطقة المحدبة المحددة بمجموعة القيود . ذلك أنه بفرض أن ا ، ب نقطتان ركنيتان تعطى أحد أحداثيتها فى حالة المستوى الثنائى بما يلى :

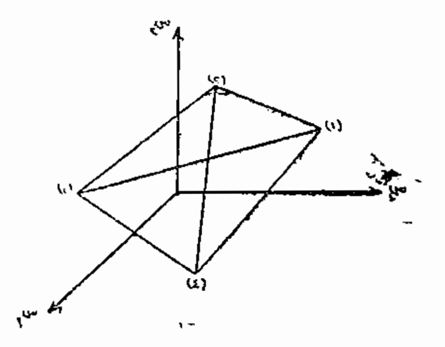
ا ≡ ($س_{ا}^{١}$ ، $س_{ا}^{٢}$) ، ب ≡ ($س_{ا}^{٢}$ ، $س_{ب}^{٢}$) . فإن إحداثيات م واقعة على الحافة التى تصل بين ا ، ب تعطى بـ م ≡ ($س_{١م}$ ، $س_{٢م}$) حيث :

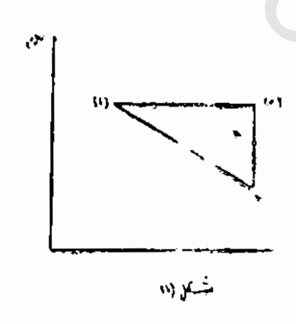
$س_{١م}$ = $\lambda$$س_{١١}$ + (١ – λ) $س_{١ب}$ ، $س_{٢م}$ = $\lambda$$س_{١٢}$ + (١ – λ) $س_{٢ب}$. فإذا كانت دالة الهدف ع = $حـ_{١}$$س_{١}$ + $حـ_{٢}$$س_{٢}$ فإن دالة الهدف عند ا ، ب ، م تعطى على الترتيب بـ $ع_{١}$ = $حـ_{١}$$س_{١}$ ا +

حـ٢ س٢أ ، ع ب = حـ١ س١ب + حـ٢ س٢ب ، ع م = حـ١ س١م + حـ٢ س٢م = حـ١ [λ س١أ + (١ − λ) س١ب] + حـ٢ [λ س٢أ + (١ − λ) س٢ب] والتى تؤول بتجميع الحدود إلى الصيغة المبسطة ع م = λ ع أ + (١ − λ) ع ب . ولما كانت ١ > λ ≥ صفر فإنه إذا كانت ع أ > ع ب مثلا فإن ع أ ≥ ع م ≥ ع ب . ولما كانت أى نقطة داخل المنطقة المحدبة أو واقعة على حوافها يمكن بنفس الطريقة السابقة التعبير عنها كتوفيق خطى لمجموعة من النقط الركنية للمنطقة المحدبة فإن قيمة ع بهذه النقطة لا يمكن أن تزيد عن قيمة ع للنقط الركنية ويتبع ذلك بالضرورة أن يكون الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية هو نقطة ركنية . ولما كان عدد النقط الركنية فى المنطقة المحدبة المحدودة بمجموعة القيود فى مسألة البرمجة الخطية عدداً محدداً يتبع ذلك أن عدداً محدداً من الحلول يجب وضعه فى الأعتبار أحدها هو الحل الأمثل .

إذا تجمعت ثلاثة نقط (٢ + ١) فى المستوى الثنائى نشأ عن ذلك مثلث يكون منطقة محدبة فى شكل (١١) . وإذا تجمعت أربعة نقط (٣ + ١) فى المستوى الثلاثى نشأ عن ذلك تكوين غلاف محدب فى شكل (١٢) وهكذا ..

وعموما إذا تجمعت نقط ن + ١ فى فراغ بأبعاد ن نشأ غلاف محدب يسمى بالسمبلكس .





شكل (١١)

(٢ — ٤) بعض المسائل المعيارية

(٢ — ٤ — ١) مسألة التغذية

من المسائل المعيارية فى البرمجة الخطية التى عولجت منذ بداية تطبيق هذا الأسلوب الرياضى مسألة التغذية والتى يمكن تلخيصها فى الجدول التالى :

العناصر الغذائية		١	٢	٣		ر		ن	الحد الأدنى المطلوب
		الأطعمة							
	١	أ١١	أ١٢	أ١٣		أ١ر		أ١ن	ب١
	٢	أ٢١	أ٢٢	أ٢٣		أ٢ر		أ٢ن	ب٢
	٣	أ٣١	أ٣٢	أ٣٣		أ٣ر		أ٣ن	ب٣
	و	أو١	أو٢	أو٣		أور		أون	بو
	م	أم١	أم٢	أم٣		أمر		أمن	بم
التكاليف		ح١	ح٢	ح٣		حر		حن	

جدول (١)

حيث يتوفر لدينا مجموعة مختلفة من الأطعمة يرمز لها بالرموز ١ ، ٢ ، ... ، ر ، ... ، ن ويحتوى كل طعام من هذه الأطعمة على مجموعة من العناصر الغذائية عددها م . ويرمز لها بالرموز ١ ، ٢ ، ... ، و ، م وتمثل أور مقدار ماتحتويه الوحدة (وحدة الوزن مثلا) من الطعام ر من العنصر الغذائى و . وتمثل ب١ ، ب٢ ، ... ، بم الحد الأدنى المطلوب استيفاؤه من هذه العناصر (التى قد تكون سعرات حرارية — بروتين — كالسيوم — فيتامينات) . أما تكلفة الوحدة من الطعام المستخدم فتعطى بقيم حر ، ر = ١ ، ... ، ن . والمطلوب هو تحديد قائمة من هذه الأطعمة بكميات سر ، ر = ١ ، ... ، ن تفى

بالمتطلبات الموضوعة وتكون تكلفتها أقل ما يمكن . وبذلك يكون النموذج الرياضى لمسألة التغذية هو :

تدنية :

$$ع = ح_{1} س_{1} + ح_{2} س_{2} + \cdots + ح_{ن} س_{ن}$$

مستوفيا

$$(12) \begin{cases} ا_{11} س_{1} + ا_{21} س_{2} + \cdots + ا_{1} س_{ن} \geqslant ب_{1} \\ ا_{12} س_{1} + ا_{22} س_{2} + \cdots + ا_{2} س_{ن} \geqslant ب_{2} \\ \cdots \\ ا_{م1} س_{1} + ا_{م2} س_{2} + \cdots + ا_{من} س_{ن} \geqslant ب_{م} \\ س_{1} ، س_{2} ، \cdots ، س_{ن} \geqslant \text{صفر} \end{cases}$$

وفى حالة وجود طعامين فقط يمكن حل مسألة التدنية بالطريقة البيانية كما ذكرنا سابقا . والأمثلة التالية تبين بعض التطبيقات .

مثال (١) :

ينتج مصنع أدوية كبسولات للفيتامين وذلك بخلط مكونين ا ، ب والجدول التالى يوضح العناصر التى يحتوى عليها كل من المكونين لكل وحدة والحد الادنى المطلوب توفيره من العناصر . كما يوضح تكلفة الوحدة لكل مكون .

	المكونات أ	المكونات ب	الحد الأدنى المطلوب
فيتامين ب$_{1}$	١٠	١٢,٥	٥٠ مجم
فيتامين ب$_{2}$	٠,١٥	٠,٦	١ مجم
فيتامين ب$_{6}$	١,٢	,٣	٣ مجم
فيتامين ب$_{12}$	,٥٥	,٢٥	٢ مكجم
سعر الوحدة بالمليم	٢,٦	,٨	

النموذج الرياضى لمسألة التغذيه السابقة هو :

أوجد قيمة س$_{1}$ ، س$_{2}$ ⩾ صفر التى تجعل :

ع = ٢,٦ س$_{1}$ + ١,٨ س$_{2}$

أصغر ما يمكن مستوفيا

ب$_{1}$ ≡ ١٠ س$_{1}$ + ١٢,٥ س$_{2}$ ⩾ ٥٠

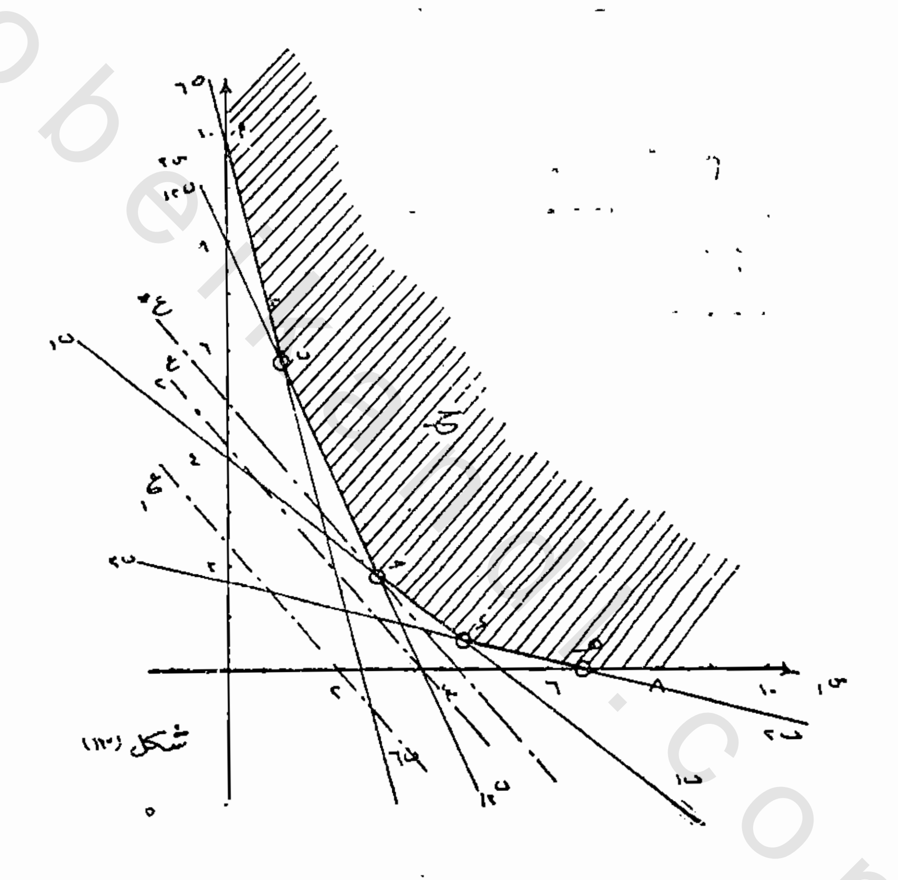
ب$_{2}$ ≡ ,١٥ س$_{1}$ + ,٦ س$_{2}$ ⩾ ١

ب$_{6}$ ≡ ١,٢ س$_{1}$ + ,٣ س$_{2}$ ⩾ ٣

ب$_{12}$ ≡ ,٥٥ س$_{1}$ + ,٢٥ س$_{2}$ ⩾ ٢

ويوضح شكل (١٣) المنطقة ح التى تحقق كل الشروط للقيود السابقة . ولكى

تكون ع أصغر ما يمكن يجب أن تكون أقرب ما يمكن لنقطة الأصل ى وذلك بتحريك خطوط التكلفة المتساوية ع١ ، ع٢ حتى تصل إلى أقرب نقطة فى المنطقة وهى النقطة (جـ) (تقاطع ب١ ، ب٢) والتى تعطى :



$$س^*_١ = ٢,٨٦ \text{ ، } س^*_٢ = ١,٧١ \text{ ، } ع^* = ٧,٨ \text{ مليم}$$

مثال (٢):

يقوم مصنع منتجات مطاطية بإنتاج منتجه الرئيسى بخلط نوعين ا ، ب من

المطاط الخام حيث يحتوى على نوع على أربعة عناصر رئيسية . ويوضح الجدول التالى النسبة المئوية بالوزن لإحتواء نوع المطاط على عناصره المختلفة .

العناصر

	س١	س٢	س٣	س٤
المطاط أ	صفر	٥٠٪	٣٥٪	١٥٪
المطاط ب	٤٥٪	٣٠٪	صفر	٢٥٪

وتطلب المواصفات الفنية المنتج الرئيسى إحتواء الشحنة فى إسطمبات التشكيل على ١ كجم من س١ ، ٣ كجم من س٢ ، ١ كجم من س٣ ، ١½ كجم من س٤ . ويمثل الجدول التالى المعلومات المطلوبة للمسألة .

العناصر	نوع المطاط أ	نوع المطاط ب	المتطلبات بالكيلو جرام
س١	صفر	٫٤٥	١
س٢	٫٥	٫٣	٣
س٣	٫٣٥	صفر	١٫٥
س٤	٫١٥	٫٢٥	١٫٥
سعر بالكيلو جرام	٤٫٥ جنيه	٣٫٥ جنيه	

والنموذج الرياضى للمسألة السابقة هو :

إختار س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

مستوفياً

م$_1$ ≡ صفر س$_1$ + ٤٥و س$_2$ ≥ ١

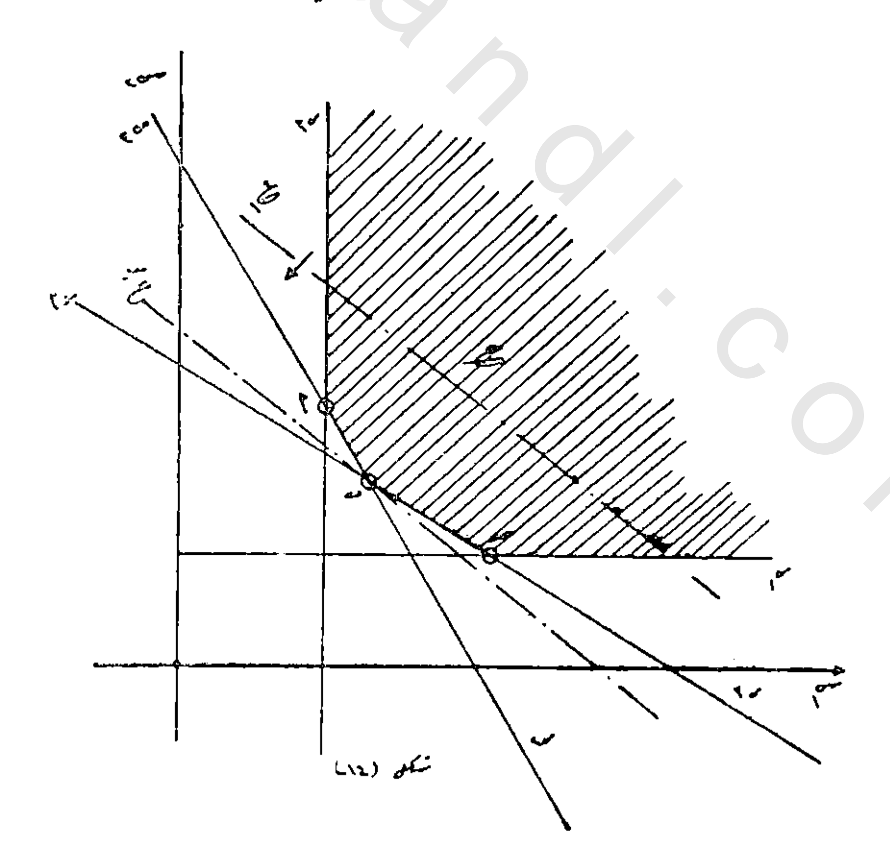
م$_2$ ≡ ٥و س$_1$ + ٣و س$_2$ ≥ ٢

م$_3$ ≡ ٣٥و س$_1$ + صفر س$_2$ ≥ ١

م$_4$ ≡ ١٥و س$_1$ + ٢٥و س$_2$ ≥ ١و٥

بحيث تجعل :

ع = ٣و٥ س$_1$ + ٤و٥ س$_2$ أقل ما يمكن



شكل (١٤)

وشكل (١٤) يبين الحل البيانى الذى يعطى الحل الأمثل عند النقطة ب حيث $س_١ = ٣,٨$ ، $س_٢ = ٢,٨$ ، ع° = ٤و٣٠

مثال (٣) :

يقوم مصنع دخان بإنتاج أحد أنواع تبغ الغليون بخلط نوعين عياريين $ى_١$ ، $ى_٢$ يحتويان على العناصر الأساسية ا ، ب ، حـ .

ويوضح الجدول التالى نسب إحتواء كل نوع من أنواع التبغ العيارى على العناصر المختلفة المطلوبة . والمطلوب تحديد أفضل كميات $س_١$ ، $س_٢$ من النوعين لتقليل التكلفة إلى أدنى قيمة ممكنة .

العناصر	$ى_١$	$ى_٢$	الحد الأدنى للمطلوب
	النسب المئوية للمكونات		
ا	١٢٪	٨٪	٦٪
ب	١٢٪	١٥٪	٦و٧٥٪
حـ	٢٠	٧و٥	٧و٥ ٪
التكلفة بالقروش	٣و—	٣و٥٠	

والنموذج الرياضى للمسألة السابقة هو :

اجعل ع = ٣ $س_١$ + ٣و٥ $س_٢$

أقل ما يمكن مستوفيا

ا ≡ ١٢ $س_١$ + ٨ $س_٢$ ⩾ ٦

ب ≡ ١٢ $س_١$ + ١٥ $س_٢$ ⩾ ٦,٧٥

حـ ≡ ٢٠ $س_١$ + ٧,٥ $س_٢$ ⩾ ٧و٥

$س_١$ ، $س_٢$ ⩾ صفر

والحل البيانى للمسألة مبين فى شكل (١٥) حيث $س_1 = ٤٢$و ، $س_2 = ١٢$و ، $ع^* = ٦٢$و١٠ .

ونحسب نسب الخلط $ن_1$ ، $ن_2$ من العلاقة :

$$ن_1 = \frac{س_1}{س_1 + س_2} = ٧٧\ \% \quad ، \quad ن_2 = \frac{س_2}{س_1 + س_2} = ٢٣\ \%$$

شكل (١٥)

(٢ — ٤ — ٢) تحميل الماكينات :

من المسائل المعيارية التى تستخدم فيها البرمجة الخطية مسألة تحميل الماكينات وفيها يفترض معرفة المعاملات الفنية لاستخدام الموارد المتاحة والتى يمكن صياغتها على شكل مجموعة من القيود تسمى بالقيود الفنية والتى تعتمد على الفن التكنولوجى السائد والذى يفترض ثباته خلال فترة التخطيط . بالإضافة إلى أى قيود أخرى تفرضها طبيعة المسألة مثل قيود التسويق أو الاستخدام أو التمويل وخلافه ومع تحديد أهداف المنشأة مثل تعظيم الربح أو تدنية التكاليف يمكن قياس فاعلية التخطيط بدالة الهدف . ويمكن التعبير عن ذلك فى شكل الجدول التالى :

			المنتجات							
			١	٢	٣		ز		ن	الموارد المتاحة
القيود الفنية	الطاقات (فنيات)	١	أ١١	أ١٢	أ١٣		أ١ز		أ١ن	ب١
		٢	أ٢١	أ٢٢	أ٢٣		أ٢ز		أ٢ن	ب٢
		و	أو١	أو٢	أو٣		أوز		أون	بو
		ل	أل١	أل٢	أل٣		ألز		ألن	بل
قيود التسويق والتمويل والاستخدام	المتطلبات	ل+١	أل+١،١	أل+١،٢	أل+١،٣		أل+١،ز		أل+١،ن	بل+١
		م	أم١	أم٢	أم٣		أمز		أمن	بم
	صافى الربح أو التكاليف		ص١	ص٢	ص٣		صز		صن	

والتي يمكن صياغتها بنموذج البرمجة الخطية التالي :

$$\text{تعظيم (تدنية) ع} = \sum_{ر=1}^{ن} حـ_ر\, س_ر$$

مستوفيا

$$\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ور}\, س_ر \le ب_و \qquad و = ١ ، ٢ ، \ldots ، ل \qquad (٣)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ور}\, س_ر \;(\ge ، = ، \le)\; ب_و \qquad و = ل + ١ ، \ldots ، م$$

$$س_ر \ge \text{صفر} \qquad ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن$$

وفى حالة وجود منتجين فقط يمكن حل مسألة تحميل الماكينات بالطريقة البيانية .

مثال (٤) :

تغذى إحدى أفران صهر الزجاج ماكينات النفخ الآلى لإنتاج أغلفة المصابيح الكهربائية (البالون) ويمكن إنتاج نوعين رئيسيين على هذه الماكينات . البالون العادى والطاقة القصوى لإنتاجه على هذه الماكينات ٤٨ مليون بالونة سنويا والبالون ذو الأغراض الخاصة والطاقة الإنتاجية القصوى له ٢٠ مليون بالونة سنويا .

والمطلوب توفير ٢٥ مليون بالوتة سنويا من البالون العادى على الأقل لا يجب أن تزيد عن ٣٥ مليون بالونة لظروف التخزين . ويجب توفير ٣ مليون بالونة سنويا على الأقل من أنواع البالون الخاصة ، على أنه فى كل الأحوال يجب أن تكون نسبة البالون العادى على الأقل خمسة أضعاف البالون الخاص . أوجد أفضل تحميل للماكينات بفرض أن العائد من الطرازات الخاصة للبالون ضعف العائد من الأنواع العادية بفرض أن الطاقة الإنتاجية الكلية ١٠٠ ٪ فإن إنتاج مليون بالونة من الأطرزة الخاصة يستنفذ ٥ ٪ ($\frac{1}{2}$ ٢) من الطاقة الإنتاجية المتاحة بينما يستنفذ إنتاج مليون بالوته من الأطروة العادية ٢,٠٨ ٪ من الطاقة الإنتاجية المتاحة .

وبذلك يمكن صياغة النموذج التالى :

أوجد كميات الإنتاج $س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر لتعظيم

$$ع = ٢ س_1 + س_2$$

مستوفيا

$$ق_1 \equiv ٥ س_1 + ٢,٠٨ س_2 \leq ١٠٠$$ قيود فنية

قيود تخزين وتسويق وإستخدام:

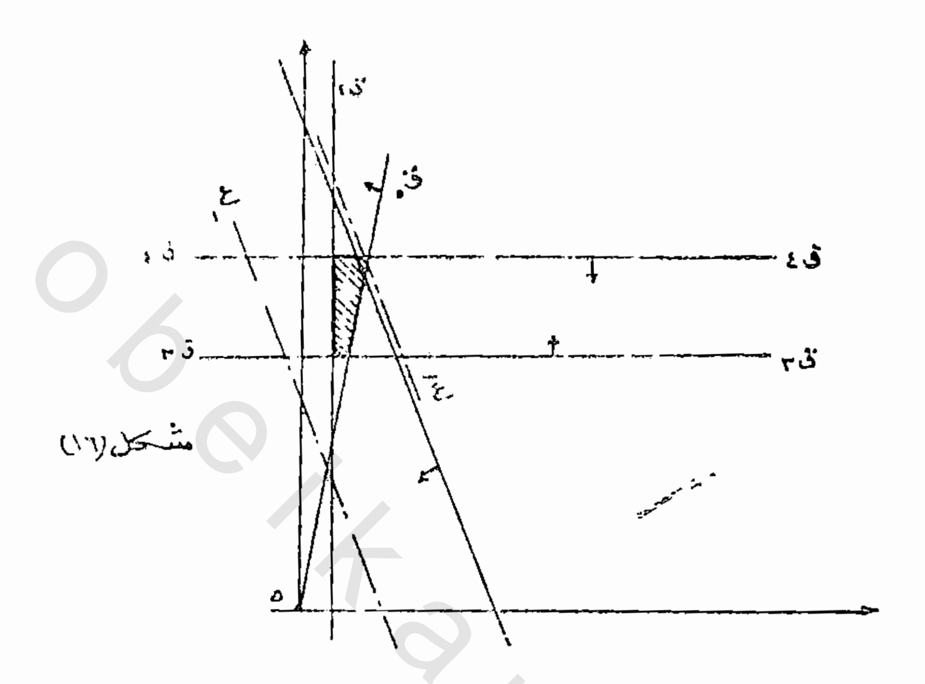
$$ق_2 \equiv س_1 \geq ٣$$

$$ق_3 \equiv س_2 \geq ٢٥$$

$$ق_4 \equiv س_2 \leq ٣٥$$

$$ق_5 \equiv \frac{س_2}{س_1} \geq ٥$$

وحل المسألة بيانيا موضح فى شكل ١٦ .



مشكل (١٦)

حيث نحصل على $س_١ = ٥,٤$ ، $س_٢ = ٣٥$ ، $ع° = ٨و٤٥$

مثال (٥) :

ينتج مصنع للسيارات نوعين رئيسيين من المنتجات السيارات العادية والمركبات ويتم ذلك فى الأقسام الرئيسية التالية :

قسم المكابس ، قسم تجميع آلة الاحتراق ، قسم تجميع هياكل السيارات، وقسم تجميع هياكل المركبات ، وقسم الدهان والتلميع .

ويوضح الجدول التالى الطاقة الإنتاجية المتاحة والمعاملات الفنية للمسألة ويوضح الصف الأخير هامش الربح بالجنيه .

(١) طاقة الإنتاجية السنوية (بالآلاف)		القسم	(٢) المعاملات الفنية* (معاملات استغلال الطاقة)		الطاقة المتاحة
سيارات عادية س١	لوريات س٢		نسبة استغلال الطاقة للسيارات	نسبة استغلال الطاقة للمركبات	
١٥	٢٠	المكابس	٥	٦٫٦٦	
٢٠	١٥	تجميع آلة الاحتراق	٣٫٣٣	٦٫٦٦	١٠٠
١٤	—	تجميع : كل السيارات	٧٫١٤	—	١٠٠
—	١٤	تجميع هياكل المركبات	—	٧٫١٤	١٠٠
٣٠	١٠	الدهان والتلميع	٣٫٣٣	٢٫٥	١٠٠
٢٥٠	٤٠٠	هامش الربح			

* الجدول (٢) نحصل عليه من مقلوب القيم في الجدول (١) مضروبة × ١٠٠

وبذلك يمكن صياغة النموذج الرياضى التالى للمسألة السابقة .

أجعل :

(١٢)

ع = ٢٫٥ س$_١$ + ٤ س$_٢$ (بالمليون جنيه)

أكبر ما يمكن مستوفيا

ق$_١$ ≡ ٦٫٦٦ س$_١$ + ٥ س$_٢$ ≤ ١٠٠

ق$_٢$ ≡ ٣٫٢٧ س$_١$ + ٦٫٦٦ س$_٢$ ≤ ١٠٠

ق$_٣$ ≡ ٧٫١٤ س$_١$ ≤ ١٠٠

ق$_٤$ ≡ ٧٫١٤ س$_٢$ ≤ ١٠٠

ق$_٥$ ≡ ٣٫٣٣ س$_١$ + ٢٫٥ س$_٢$ ≤ ١٠٠

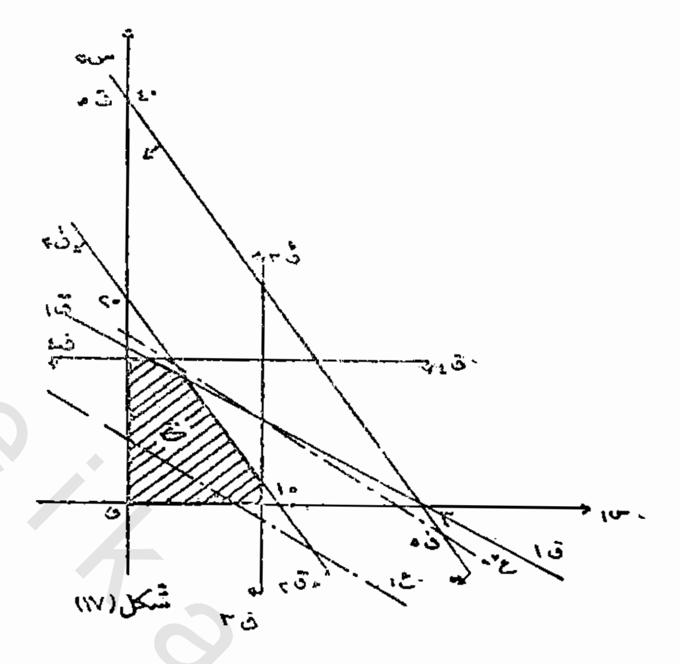
س$_١$ ، س$_٢$ ≥ صفر

والحل البيانى للمسألة السابقة مبين فى شكل (١٧) ويلاحظ أن القيد ق$_٥$ عاطل أو غير محدد للحل .

وهو يعطى : س$_١$ = ١٢ × ١٠^٣

س$_٢$ = ٨ × ١٠^٣

ع* = ٦٫٨ × ١٠^٦



شكل (١٧)

(٢ — ٥) بعض الملاحظات الخاصة بالبرمجة الخطية :

(٢—٥—١) بناء النموذج الرياضى :

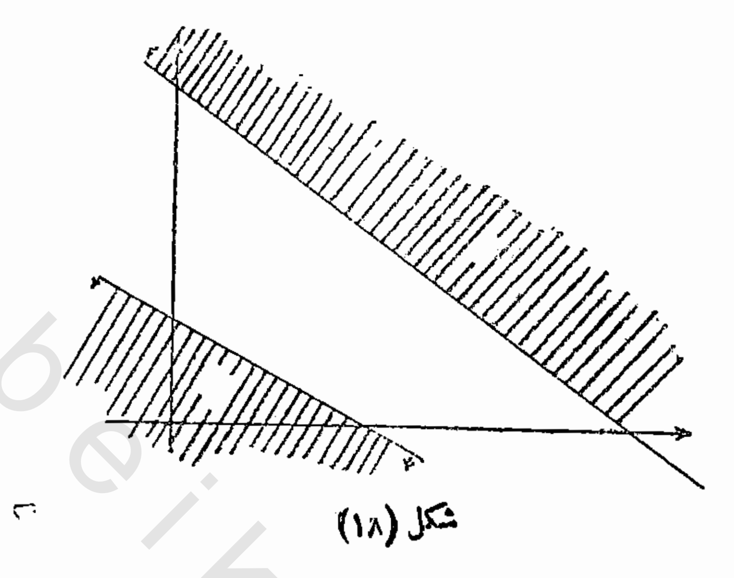
١ — قد يؤدى الخطأ فى بناء النموذج الرياضى للمسألة إلى الحصول على بعض المشاكل فى البرمجة الخطية نذكر منها ما يلى :

١ — النظام المتناقض :

شكل (١٨) يبين شكل القيود الناتجة عن مجموعة المتباينات :

$$ق_١ \equiv ٧س_١ + ٩٠س_٢ \leqslant ٦٣$$

$$ق_٢ \equiv ٥س_١ + ١٠س_٢ > ٢٠$$



شكل (١٨)

حيث يؤدى القيد ق$_1$ إلى الحصول على المنطقة المحدبة ح$_1$ بينما يؤدى ق$_2$ إلى الحصول على المنطقة المحدبة ح$_2$ بحيث لا يمكننا أن نحقق أى من القيدين دون انتهاك للقيد الآخر . وواضح ان هناك خطأ فى بناء هذا النموذج ربما يكون فى إتجاه إشارة القيد الأول الذى لو أصبح ٧س$_1$ + ٩س$_2$ $\leq$ ٦٣ لأصبح القيد ق$_1$ غير عامل وأصبح النظام صحيح ويعتمد على القيد الثانى فقط . تسمى المجموعات المحدبة السابقة، بأنها مجموعات منفصلة (غير متصلة) .

٢ — حل غير محدود:

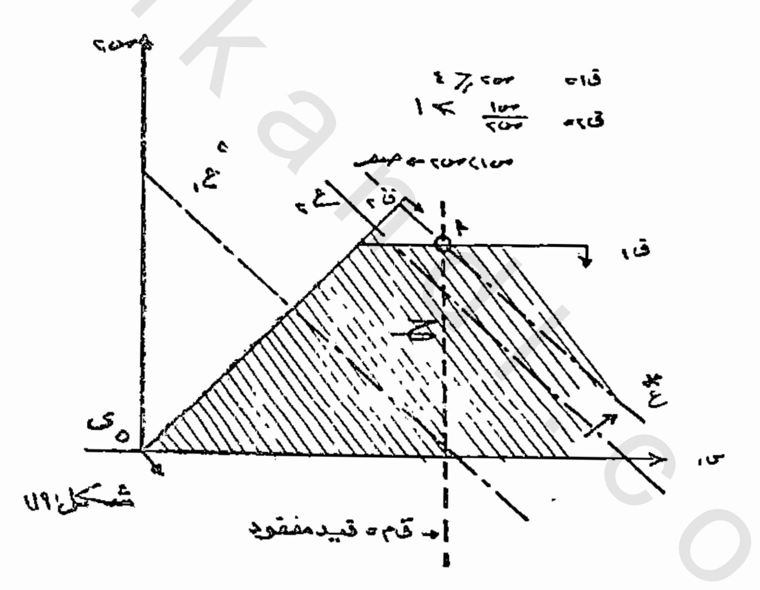
يبين شكل (١٩) منطقة الإمكانيات للمسألة .

عظم ع = س١ + س٢ مشروطاً

ق١ ≡ س٢ ≥ ٤

ق٢ × $\frac{س_1}{س_2}$ ≤ ١

س١ ، س٢ ≥ صفر



ويلاحظ أن المجموعة ح مفتوحة من جهة اليمين ومعنى ذلك أمكانية تحريك ع في إتجاه السهم وبعيداً عن نقطة الأصل إلى مالا نهاية وبالتالى لا يوجد قيد على أختيارنا . وهذه الحالة تنشأ غالباً إذا نسينا أحد القيود في بناء النموذج الرياضى مثل القيد المفقود ق٣ الذى هو في هذه الحالة س١ ≥ ٦ حيث يكون الحل الأمثل عند ا حيث س١ = ٦ ، س٢ = ٤ ، ع° = ١٠

٣ — حل غير عملى :

ومثال ذلك مجموعة القيود :

$$ق_1 \equiv -٦س_1 + ٣س_2 \geqslant ٩$$

$$ق_2 \equiv \frac{س_1}{س_2} \geqslant ١$$

شكل (٢٠)

حيث المنطقة المحدبة ح لا تحقق الشرط $س_1$ ، $س_2 \geq$ صفر . وهذا الخطأ ينشأ غالباً بسبب إشارة خاطئة لاحدى المعاملات فى القيود مثلا + ٦ $س_1$ بدلا — ٦ $س_1$ ، ≥ ٩ بدلا من ≤ ٩ .

(٢ — ٥ — ٢) الكسور فى الحل :

الحل الأمثل فى مسألة البرمجه الخطيه يحتوى عادة على الكسور ويفترض قابلية المتغيرات للتجزئة وفى كثير من التطبيقات يكون هذا الافتراض صحيحاً . إلا انه قد تفرض طبيعة بعض المتغيرات أو كلها أن تكون قيم الحل صحيحة وفى هذه الحالة يجب أن ننوه أن طريقة البرمجة الخطية العادية لا تصلح .

لتوضيح المفهوم السابق افترض المعاملات التالية لمسألة تحميل مكتبات :

تعظيم $ع = س_١ + ٢ س_٢$

مستوفيا

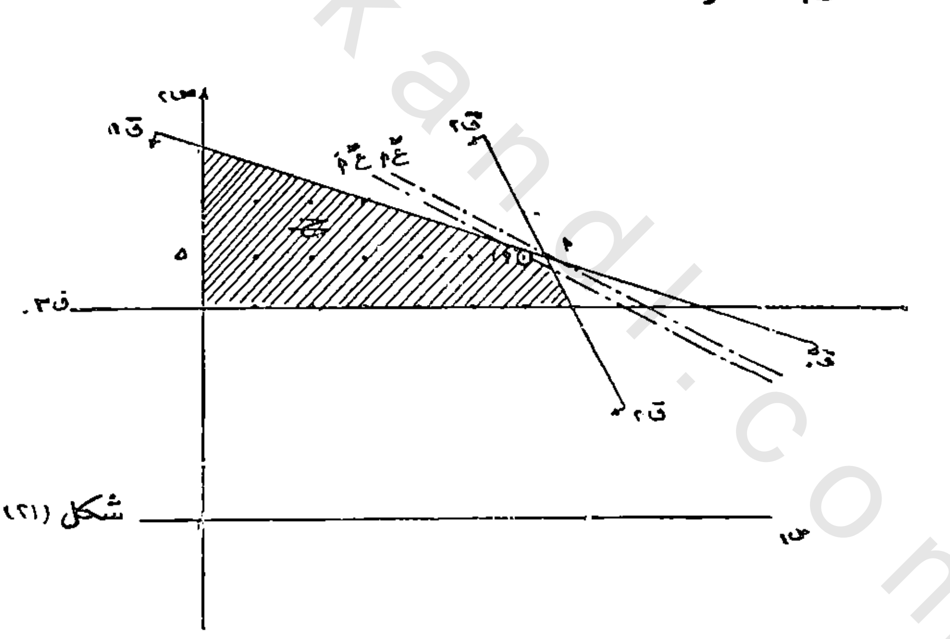
$ق_١ = ٢ س_١ + ٦ س_٢ \leqslant ٤٢$

$ق_٢ = ٤ س_١ + ٢ س_٢ \leqslant ٣٦$

$ق_٣ = \quad س_٢ \leq ٤$

$س_١ ، س_٢ \geqslant$ صفر

حيث الحل الأمثل يعطى من شكل (٢١) بالقيم $س_١ = ٨ و٤ ، س_٢ = ٦,٦$ ، $ع^*_١ = ٢ و١٦$ عند النقطة ا .



شكل (٢١)

فإذ أضيف القيد $س_١ ، س_٢$ أعداد صحيحة إلى مجموعة القيود السابقة فإن القيم السابقة المتغيرات $س_١ ، س_٢$ لا تحقق القيد الجديد وبالتالى يلزمنا تحريك $ع^*_١$ فى منطقة الامكانيات ح حتى تقابل أقرب أعداد صحيحة وهى فى حالتنا عند ا حيث :

$$س_1 = ٦ ، س_2 = ٥ ، ح^*_1 = ١٦$$

ومن المهم أن نلاحظ أن $أ$ ليست نقطة قصوى (ركنية) للمنطقة الحدية ح بل على عكس ذلك نقطة داخلية . كما نلاحظ أن $ع^*_1 > ع^*_1$.

(٢ — ٦) أنظمة المدخلات والمخرجات وعلاقتها بالبرمجة الخطية

أحد النظريات الهامة فى الاقتصاد الرياضى الحديث هى أنظمة المدخلات والمخرجات التى صاغها العالم ليونتيف . وسوف نقتصر دراستنا هنا على حالة مبسطة حيث يقسم الاقتصاد إلى قطاعين رئيسيين وذلك لدراسة المسألة بالطريقة البيانية . إفترض ليونتيف وجود تداخل من القطاعات المكونة للإقتصاد وأن كل منها يعتمد على الآخر . فإذا فرضنا فى حالتنا المبسطة إقتصاد من قطاعى الزراعة والصناعة فإنه يمكن تكوين الجدول التالى الذى يمثل المدخلات والمخرجات فى القطاعين .

	المدخلات		الاستهلاك	المخرجات الكلية
	قطاع الصناعة	قطاع الزراعة		
قطاع صناعة	$س_{11}$	$س_{21}$	$ح_1$	$س_1$
قطاع الزراعة	$س_{12}$	$س_{2}$	$ح_2$	$س_2$
العمل	$س_{ل1}$	$س_{ل2}$	—	$س_ل$

جدول ليونتيف لقطاعين

حيث يوضح الجدول أن إجمالى إنتاج قطاع الصناعة هو $س_1$ يستنفذ منها

$س_{11}$ أثناء هذا الإنتاج بينما تستخدم كمية $س_{21}$ من إنتاج قطاع الصناعة للإنتاج الزراعى . وتبقى كمية $ح_1$ تظهر الاستهلاك . وبنفس الكيفية ينتج قطاع الزراعة كمية $س_2$ يخصص منها $س_{12}$ للإنتاج الصناعى ، $س_{22}$ للإنتاج الزراعى ويتبقى كمية $ح_2$ الاستهلاك . ويحتاج كل من القطاعين إلى عنصر العمل بالكميات $س ل_1$ للإنتاج الصناعى ، $س ل_2$ الانتاج الزراعى . وافترض ليونتيف وجود معاملات تكنولوجية ثابتة من المدخلات والمخرجات وهى المعاملات التكنولوجية $ا_{ور}$ التى تعبر عما يحتاجه إنتاج الوحدة فى القطاع $ر$ من وحدات القطاع $و$. اى أن :

$$(14)\quad \begin{cases} س_{11} = ا_{11}\, س_1 \quad ، \quad س_{21} = ا_{21}\, س_2 \\ س_{12} = ا_{12}\, س_1 \quad ، \quad س_{22} = ا_{22}\, س_2 \\ س ل_1 = ا ل_1\, س_1 \quad ، \quad س ل_2 = ا ل_2\, س_2 \end{cases}$$

ولما كان :

$$(15)\quad \begin{cases} س_1 \geqslant س_{11} + س_{21} + ح_1 \\ س_2 \geqslant س_{12} + س_{22} + ح_2 \\ س ل \geqslant س ل_1 + س ل_2 \end{cases}$$

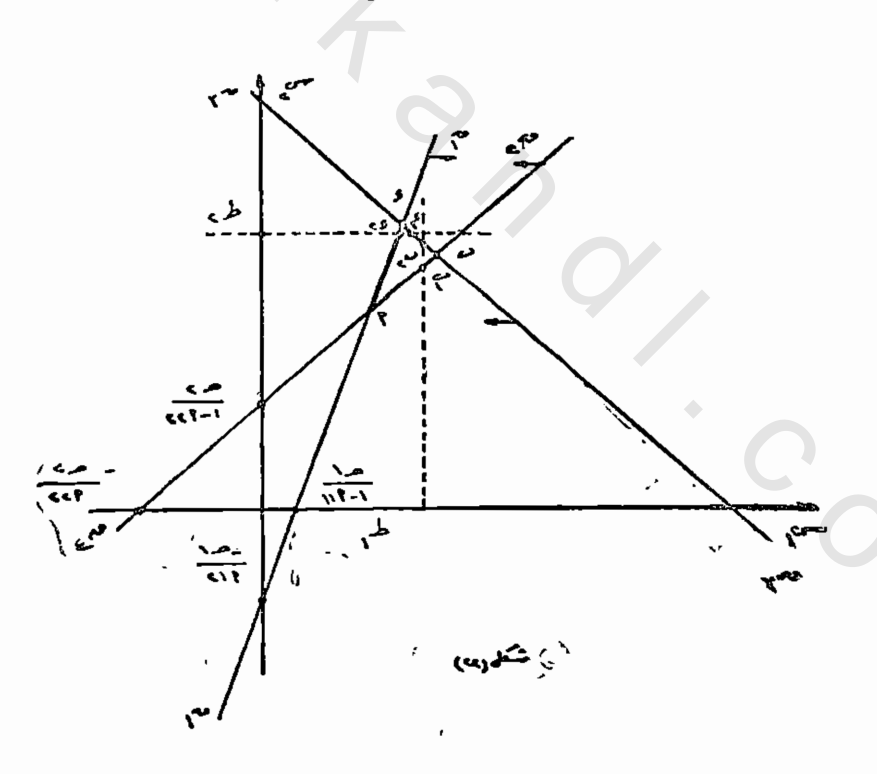
فإن :

$$(16)\quad \begin{cases} ا_{11}\, س_1 + ا_{21}\, س_2 + ح_1 \leqslant س_1 \\ ا_{12}\, س_1 + ا_{22}\, س_2 + ح_2 \leqslant س_2 \\ س ل_1 + س ل_2 \leqslant س ل \end{cases}$$

أى أن :

$$\left.\begin{array}{lll} ق_١ = (-١_{١١}) س_١ - ١_{٢١} & & س_٢ \geqslant هـ_١ \\ ق_٢ = - ١_{٢٢} & س_١ + (١ - ١_{٢٢}) س_٢ & \geqslant هـ_٢ \\ ق_٣ = ال_١ & س_١ + ال_٢ & س_٢ \geqslant س ل \end{array}\right\} \quad (١١)$$

ويوضح شكل (٢٢) منطقة الامكانات م ح التى تفى بمتطلبات القطاعات المختلفة وتحقق برنامج الاستهلاك { ح١ ، ح٢ }



شكل (٢٢)

وإذا لم يكن هناك قيود أخرى فإن أفضل حل هو (ا) حيث نحصل على أقل مخرجات س١ ، س٢ مع تحقيق كل الاحتياجات ولكن إذا طلبنا مثلا

التشغيل الكامل للعمال (استنفاذ عنصر العمل) فإن الحل الأمثل يكون على الحافة ب ى ، وقد يضاف إلى مجموعة القيود (١٧) قيود الطاقة القصوى لإنتاج القطاع مثل :

$$\left\{ \begin{array}{l} س_١ \leq ط_١ \\ س_٢ \leq ط_٢ \end{array} \right. \qquad (١٨)$$

وفى هذه الحالة تنكمش منطقة الإمكانيات إلى ا ب$_١$ ب$_٢$ ى$_١$ ى$_٢$. وفى دراستنا السابقة لم نتعرض إلى دالة الهدف بالمعنى المفهوم . وقد اقتصرت الدراسة فيما سبق على إمكانيات برنامج الاستهلاك المحدد [ح$_١$ ، ح$_٢$] . ولكن يمكننا فى الدراسات الاقتصادية تحديد دوال الهدف تأخذ فى اعتبارها معدلات التنمية وبرامج الاستهلاك الزمنية .

٣ – طريقة السمبلكس لحل مسالة البرمجة الخطية

(٣ – ١) <u>مناقشة عامة :</u>

نعود الآن إلى دراسة الحالة العامة لمسألة البرمجة الخطية التى هى على الصورة :

أجعل :

ع = ح$_1$ س$_1$ + ح$_2$ س$_2$ + ... + ح$_ن$ س$_ن$ أكبر ما يمكن

مستوفيا مجموعة القيود

أ$_{و1}$ س$_1$ + أ$_{و2}$ س$_2$ + ... + أ$_{ون}$ س$_ن$ ≤ ب$_و$ (١)

و = ١ ، ٢ ، ... ، م ، س$_ر$ ≥ صفر

ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

وسوف نشرح هنا طريقة إكبار ع وهى فى الواقع مناظرة لتدنية أو تصغير (– ع) لذلك فالطريقة واحدة . والأسلوب المتبع فى الحل يعرف باسم طريقة السمبلكس وذلك لإستخدامه هندسة السمبلكس ، راجع الباب الثانى ، وقد أرسى قواعد هذه الطريقة جورج دانتزج .

أن شكل مسألة البرمجة الخطية كما هو وارد فى المعادلة (١) لا يناسب الحل بطريقة السمبلكس التى تقتضى التعامل مع معادلات وليس متباينات لذلك فان <u>الخطوة الأولى</u> : هو تحويل المتباينات إلى معادلات ويتم ذلك باضافة مجموعة من المتغيرات تسمى بالمتغيرات العاطلة أو المهملة Slack Variables وذلك

لتفريقها عن المتغيرات الأساسية المسماة والتى عادة ما تسمى بالمتغيرات الهيكلية Stru tural Valiabls أى أننا نستبدل كل متباينة فى قيود النموذج (١) بالمعادلة التالية :

$$\text{ا}_{و١}\,\text{س}_١ + \text{ا}_{و٢}\,\text{س}_٢ + \cdots + \text{ا}_{ون}\,\text{س}_ن + \text{س}_{ن+و} = \text{ب}_و \qquad (٢)$$

$$\text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م}$$

وبذلك نكون قد أضفنا متغيرات عاطلة عددها م وتصبح مسألة البرمجة الخطية فى صورتها الجديدة :

عظم :

$$\text{ع} = \text{ح}_١\text{س}_١ + \text{ح}_٢\text{س}_٢ + \cdots + \text{ح}_ن\,\text{س}_ن + \text{س}_{ن+١} + \cdots + ٠ \times \text{س}_{ن+م}$$

مستوفياً

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ا}_{١١}\text{س}_١ + \text{ا}_{٢١}\text{س}_٢ + \cdots + \text{ا}_{ن١}\,\text{س}_ن + \text{س}_{ن+١} = \text{ب}_١ \\
\text{ا}_{١٢}\text{س}_١ + \text{ا}_{٢٢}\text{س}_٢ + \cdots + \text{ا}_{ن٢}\,\text{س}_ن + \text{س}_{ن+٢} = \text{ب}_٢ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{ا}_{م١}\text{س}_١ + \text{ا}_{٢م}\text{س}_٢ + \cdots + \text{ا}_{نم}\,\text{س}_ن + \text{س}_{ن+م} = \text{ب}_م
\end{array}\right\} \quad (٣)$$

$$\text{س}_١ ، \text{س}_٢ ، \ldots \text{س}_{ن+١} ، \ldots \text{س}_{ن+م} \geq \text{صفر}$$

أى حل يحقق مجموعة المعادلات (٣) يسمى الحل الممكن (أو المتاح) Feasible Sôlu ion . أى حل يحقق المعادلات السابقة ويحتوى على عدد من المتغيرات يساوى عدد القيود (م) يسمى بالحل المتاح الأساسى Basic Feasil le Salutloin . أى حل يحقق المعادلات السابقة ويحتوى على عدد من المتغيرات يساوى عدد القيود (المعادلات) ويجعل قيمة ع أكبر ما يمكن يسمى بالحل المتاح الأساسى الأمثل Optimal Basic Feasible S lation ولكى

تفهم فكرة السمبلكس . أعتبر مجموعة المعادلات فى (٣) فهى تكون مجموعة من المعادلات م فى عدد من المتغيرات م + ن . فإذا جعلنا عدد ن من المتغيرات إختياريا تساوى صفر . فإن مجموعة المتغيرات الباقية تكون مساوية لمجموعة المعادلات م ويمكن حل النظام الجبرى الناتج (بأحد الطرق الموضحة فى الباب الأول (ونحصل على حل وحيد uniqus Solution "متغيرات الداخلة فى حل النظام . ويلاحظ أن هناك عدد عدد من الطرق مهما كان كبيرا لاختيار (م) من (م+ن من المتغيرات يعطى بـ $\frac{|م+ن}{|م \; |ن}$

وأهم ما يميز طريقة السمبلكس هو استفادتها من الفكرة الرئيسية من أن الحل الامثل هو نقطة ركنية . والنقطة الركنية بطبيعتها حل أساسى . وذلك واضح من مناقشتنا فى الباب الثانى من خواص المناطق الحدبة حيث إثبتنا أن الحل الامثل هو نقطة ركنية . والنقطة الركنية بطبيعتها حل أساس نشأ من تقاطع مسطحات بابعاد م (فى حالة متغيرين تقاطع مستقيمين) وسوف نسرد فيما يلى الاساس الرياضى لطريقة السمبلكس .

(٣ — ٢) طريقة السمبلكس

يمكن التعبير عن المسألة (٣) بجبر المصفوفة على الصورة :

عظم :

$$\left.\begin{array}{ll} ع = حَ س & \text{مستوفيا} \\ س_١ ا_١ + س_٢ ا_٢ + \cdots + س_ل ا_ل = ب & \\ س > صفر \quad ، \quad م + ن = ل & \end{array}\right\} \quad (٤)$$

حيث $س = \begin{pmatrix} س_١ \\ س_٢ \\ س_ل \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ب_١ \\ ب_٢ \\ \vdots \\ ب_م \end{pmatrix}$ ، $حـ' = [حـ_١ ، حـ_٢ ، حـ_ل]$

حيث ا ر متجه عمودى لمعاملات المتغير س ر . أى أن =

$$ا_ر = \begin{pmatrix} ا_{١ر} \\ ا_{٢ر} \\ \vdots \\ ا_{مر} \end{pmatrix} \quad ، \quad ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ل$$

سوف نفترض أنه أمكننا الحصول على حل إبتدائى س (٠) على الصورة :

$$\begin{pmatrix} س_١(٠) \\ س_٢(٠) \\ \ldots \\ س_م(٠) \\ صفر \\ صفر \\ \vdots \\ صفر \end{pmatrix}$$

(وسوف نسقط فيما بعد الرمز (٠) الدال على الحل الابتدائى على أن يعرف القارىء أننا نشير إلى الحل الابتدائى) . بحيث أن

$$س_١ ا_١ + س_٢ ا_٢ + \ldots + س_م ا_م = ب \qquad (٥)$$

لاحظ أن المتجهات ا١ ، ا٢ ، ... ، ام مستقلة بمعنى أنه يمكننا طبقا لدراستنا لجبر المتجهات فى الباب الأول التعبير عن أى متجه آخر ا ر توفيق خطى من هذه المتجهات على الصورة :

$$ا_ر = ص_{١ر} ا_١ + ص_{٢ر} ا_٢ + \ldots + ص_{مر} ا_م \qquad (٦)$$

إفترض أن هذا المتجه ك بوضع ر = ك فى (٦) نحصل على :

$$\text{أ}_{ك} = \text{ص}_{1ك}\,\text{أ}_1 + \text{ص}_{2ك}\,\text{أ}_2 + \cdots + \text{ص}_{مك}\,\text{أ}_م \qquad (٧)$$

بضرب طرف المعادلة (٧) فى ثابت θ يصبح :

$$\theta\,\text{أ}_{ك} = \theta\,(\text{ص}_{1ك}\,\text{أ}_1 + \text{ص}_{2ك}\,\text{أ}_2 + \text{ص}_{مك}\,\text{أ}_م) \qquad (٨)$$

بطرح هذا المقدار من (٥) نحصل على :

$$\text{أ}_1(\text{س}_1 - \theta\,\text{ص}_{1ك}) + \text{أ}_2(\text{س}_2 - \theta\,\text{ص}_{2ك}) + \cdots +$$
$$\text{أ}_م(\text{س}_م - \theta\,\text{ص}_{مك}) + \theta\,\text{أ}_{ك} = \text{ب} \qquad (٩)$$

ويلاحظ أن عدد المتغيرات فى المعادلة (٩) م + ١ متغير هم بالتحديد:

$$\text{س}_1 - \theta\,\text{ص}_{1ك} ،\ \text{س}_2 - \theta\,\text{ص}_{2ك} ،\ \cdots ،\ \text{س}_م - \theta\,\text{ص}_{م} ،\ \theta$$

ومن ثم فإن الحل الجديد فى المعادلة (٩) حل غير أساسى . ولكى يصبح الحل أساسى فى الضرورى أن ينعدم المقدار فى أحد الأقواس ($\text{س}_و - \theta\,\text{س}_{وك}$) ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م وفى نفس الوقت مع انعدام أحد المقادير فى الأقواس يجب أن تكون جميع القيم الأخرى فى الأقواس الباقية موجبة وذلك طبقا لشروط عدم السلبية للمتغيرات الداخلة فى الحل . والشرط السابق يحدد لنا طريقة اختيار θ حيث نختار θ بالقاعدة التالية :

$$\theta = \text{أقل}\left(\frac{\text{س}_و}{\text{ص}_{وك}}\right) \quad و = ١ ، ٢ ، \cdots ، م$$

وإذا فرضنا أن هذا الشرط تحقق عند المدلول و = ر أى :

$$\theta_ر = \text{أقل}\left(\frac{\text{س}_و}{\text{ص}_{وك}}\right) = \frac{\text{س}_ر}{\text{ص}_{رك}} \qquad (١٠)$$

ومن ذلك أنه لادخال المتغير ك فى الحل يجب إزالة المتغير ر من الحل الأساسى وتصبح فيه $\text{س}_{\text{ر}}$ الجديدة مساوية لقيمة $\theta_{\text{ر}}$ المحددة من العلاقة (١٠).

فإذا إنتقلنا إلى دالة الهدف لدراسة أثر الخطوة السابقة عليها، وبفرض أن قيمة دالة الهدف الإبتدائية ع(٠) فإن القيمة الجديدة ع(١) التى نحصل عليها نتيجة لاستبدال المتغير ر بالمتغير ك تكون :

$$\text{ع}^{(1)} = \text{ح}_1(\text{س}_1 - \theta\,\text{ص}_{1\text{ك}}) + \text{ح}_2(\text{س}_2 - \theta\,\text{ص}_{2\text{ك}}) + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}(\text{س}_{\text{م}} - \theta\,\text{ص}_{\text{مك}}) + \text{ح}_{\text{ك}}\,\theta \qquad (11)$$

$$= \text{ح}_1\text{س}_1 + \text{ح}_2\text{س}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}\text{س}_{\text{م}} + \theta\left[\text{ح}_{\text{ك}} - (\text{ح}_1\text{ص}_{1} + \text{ح}_2\text{ص}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{م}})\right]$$

أو بصورة أبسط :

$$\text{ع}^{(1)} = \text{ع}^{(0)} + \theta_{\text{ك}}\left[\text{ح}_{\text{ك}} - \text{ع}_{\text{ك}}\right] \qquad (12)$$

حيث :

$$\text{ع}_{\text{ك}} = \text{ح}_1\text{ص}_{1\text{ك}} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{مك}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ح}_{\text{و}}\text{ص}_{\text{وك}} \qquad (12)$$

ولما كان المطلوب هو زيادة قيمة ع أى $\text{ع}^{(1)} > \text{ع}^{(0)}$ ونظرا لأن $\theta_{\text{ك}}$ موجبة فإنه يجب أن يكون $\text{ح}_{\text{ك}} - \text{ع}_{\text{ك}}$ مقدار موجب أى $\text{ح}_{\text{ك}} - \text{ع}_{\text{ك}} > $ صفر ومما سبق نرى أنه لكى يحدث إدخال المتغير ك تحسينا فى الحل يجب أن نختاره من

بين المتغيرات التى يتوفر فيها الشرط $ح_ر - ع_ر >$ صفر . (ويسمى المقدار $ح_ر - ع_ر$ بمقيم الحل)

ويمكن تلخيص الخطوات السابقة كما يلى :

١ — أوجد حل إبتدائى وأساسى لمسألة البرمجة الخطية تحقق المعادلة (٤) $س(٠) = (س_١(٠) ، س_٢(٠) ، \ldots ، س_م(٠))$.

٢ — أحسب قيمة $ص_{١ر} ، ص_{٢ر} ، \ldots ، ص_{مر}$ من العلاقة (٦) وذلك لجميع قيم $ر$ الغير داخلة فى الحل الأساسى السابق . افترض أن مصفوفة المعاملات $(ا_١ ، ا_٢ ، \ldots ، ا_م)$ فى الحل الأساسى السابق تكون المصفوفة الأساسية $[ا.]$. واضح أنه يمكننا من جبر المصفوفة حساب قيم $ص_ر$ من العلاقة :

$$ص_ر = [ا.]^{-١} ا_ر \qquad (١٤)$$

$$ص_ر = \{ ص_{١ر} ، ص_{٢ر} ، \ldots ، ص_{مر} \} ،$$

$$ا_ر = \{ ا_{١ر} ، ا_{٢ر} ، \ldots ، ا_{مر} \}$$

٣ — أوجد قيمة $ح_ر - ع_ر$ لجميع المتغيرات الغير داخله فى الحل الأساسى السابق إذا كانت كل القيم $ح_ر - ع_ر$ سالبة فالحل أمثل .

٤ — إذا كانت $ح_ر - ع_ر$ موجبة لبعض قيم $ر$. اختار أحد هذه القيم ولنفرض أنها عند $ك$. إدخال هذا المتغير يحسن الحل السابق .

٥ — لتحديد المتجة أو المتغير الذى يترك الحل الأساسى السابق ويستبدل بالمتغير الجديد $ك$ نوجد قيمة :

θ = أقلو $\left(\frac{س_و}{ص_{وك}} \right)$. ولنفرض أن ذلك يحدث عند ر

فتكون قيمة المغير الجديد $س^{(1)}$ ك = θ ، وقيم $س^{(1)}_و = س^{(0)}_و -$ θ $ص_{وك}$ وذلك لجميع قيم و ≠ ك .

٦ — كرر الخطوات إبتداء (٢) حتى تحصل على جميع قيم $ح_ر - ع_ر$ > صفر فيكون الحل أمثل .

لاحظ أنه لايلزمنا فى كل مرة أن نعيد حسابات قيم $ص_{ور}$ الجديدة باستخدام العلاقة (١٤) فمن دراساتنا لخواص المصفوفات فى الباب الأول علمنا أنه فى حالة استبدال عامود واحد من المصفوفة (ك بآخر ر) فإن المعاملات الجديدة ترتبط بالمعاملات السابقة (الحل الإبتدائى) بالعلاقة التالية :

$$ص^{(1)}_{ور} = ص^{(0)}_{ور} - \frac{ص^{(0)}_{وك}\ ص^{(0)}_{رر}}{ص^{(0)}_{كر}}$$

وفى أى مرحلة من مراحل الحل ط ترتبط المعاملات بالمعاملات السابقة بالعلاقة :

$$ص^{ط}_{ور} = ص^{(ط-1)}_{ور} - \frac{ص^{(ط-1)}_{وك}\ ص^{(ط-1)}_{رر}}{ص^{(ط-1)}_{كر}} \qquad (15)$$

وتمثل الخطوات السابقة فى شكل (١) .

وفى بداية الحل وبفرض أن جميع قيم $ب_و$ > صفر وجميع قيم $ا_{ور}$ > صفر ،

م > ن (المتباينات جميعها على الصورة <) . فإنه يمكن الحصول على الحل الإبتدائى بوضع جميع قيم المتغيرات الهيكلية تساوى الصفر وجميع المتغيرات العاطلة تساوى $ب_و$ أى يعطى الحل الإبتدائى من :

$$س^{(٠)} = \{ س^{(٠)} \} = \{ س_{ن+و} \} = \{ ب_و \} \quad و = ١ ، ٢ ، ... ، م \qquad (١٦)$$

ويلاحظ أن ام وهى مصفوفة معاملات الأساسيةللمتغيرات الداخلة فى الحل تكون مساوية لمصفوفة الوحدة ى بأبعاد م × م .

$$\left.\begin{array}{l} [ا_م] = [ى_م] \quad ، \quad [ا_م]^{-١} = [ى_م] \quad ، \\ ص^{(٠)}_ر = [ا_م]^{-١} \; ا_ر = [ى] \, ا_ر = ا_ر \end{array}\right\} \qquad (١٧)$$

وذلك لجميع قيم $ن_ر$ الغير داخلة فى الحل (أى المتغيرات الهيكلية) .

وفى هذه الحالة نلاحظ أن قيمة $ح_{ن ر} - ع_{ن ر}$ تعطى من العلاقة :

$$ح_{ن ر} - (ا_{١ ر} \times ٠ + ا_{٢ ر} \times ٠ + ... + ا_{م ر} \times ٠) = ح_{ن ر}$$

وذلك لأن قيم $ح_و$ للمتغيرات الداخلة فى الحل الإبتدائى وهى هنا المتغيرات العاطلة $س_{ن+و}$ هى $ح_{ن+و}$ = صفر

وبذلك فإنه فى الحل الإبتدائى لأى قيمة $ح_ك$ > صفر نختار :

$$\theta = \text{أقل}_و \left(\frac{س_و}{ا_{وك}} \right) = \text{أقل}_و \left(\frac{ب_و}{ا_{وك}} \right) = \frac{ب_ر}{ا_{رك}}$$

ونستبدل المتغير فى الحل الإبتدائى بالمتغير ك ونحسب قيم المعاملات الجديدة

$$\text{ص}^{(1)}_{\text{و ر}} = \text{أ}_{\text{و ر}} - \frac{\text{أ}_{\text{و ك}} \cdot \text{أ}_{\text{ر}}}{\text{أ}_{\text{ك ر}}}$$

ويمكن تمثيل ذلك بالجدول (١) التالى :

			(ن) متغيرات حقيقية						(م) متغيرات [illegible]			
			ح١	ح٢	.	ح ك	...	ح ن	صفر	..	..	صفر
حدود	الحل	المتغيرات الأساسية	س١	س٢		س ك	..	س ن	س ن+١	..	.	س ن+م
صفر	ب١	س ن+١	أ١١	أ١٢		أ١ك	..	أ١ن	١	صفر		صفر
صفر	ب٢	س ن+٢	أ٢١	أ٢٢		أ٢ك		أ٢ن	صفر	١		صفر
	ب ر	س ن+ر	أ ر١	أ ر٢		(أ ر ك)		أ ر ن				
صفر	ب م	س ن+م	أ م١	أ م٢		أ م ك		أ م ن	صفر	..	صفر	١
ح ر − ع ر			ح١	ح٢		ح ك		ح ن	٠	٠	٠	٠

جدول (١)

جدول الحل الابتدائى لمسألة البرمجة الخطية

حيث يسمى العنصر أ ر ك الذى يقع عند تقاطع المتغير ك الذى يدخل الحل والمتغير ر الذى يترك الحل بالمفصل Pivot ولتحديد قيم المعاملات للجدول التالى للحل الإبتدائى نتبع الخطوات التالية التى هى نفسها مجموعة المعادلات (١٥):

١ — جميع المعاملات الواقعة على عامود المفصل تصبح صفر فيما عدا المفصل الذى تصبح قيمته الواحد الصحيح .

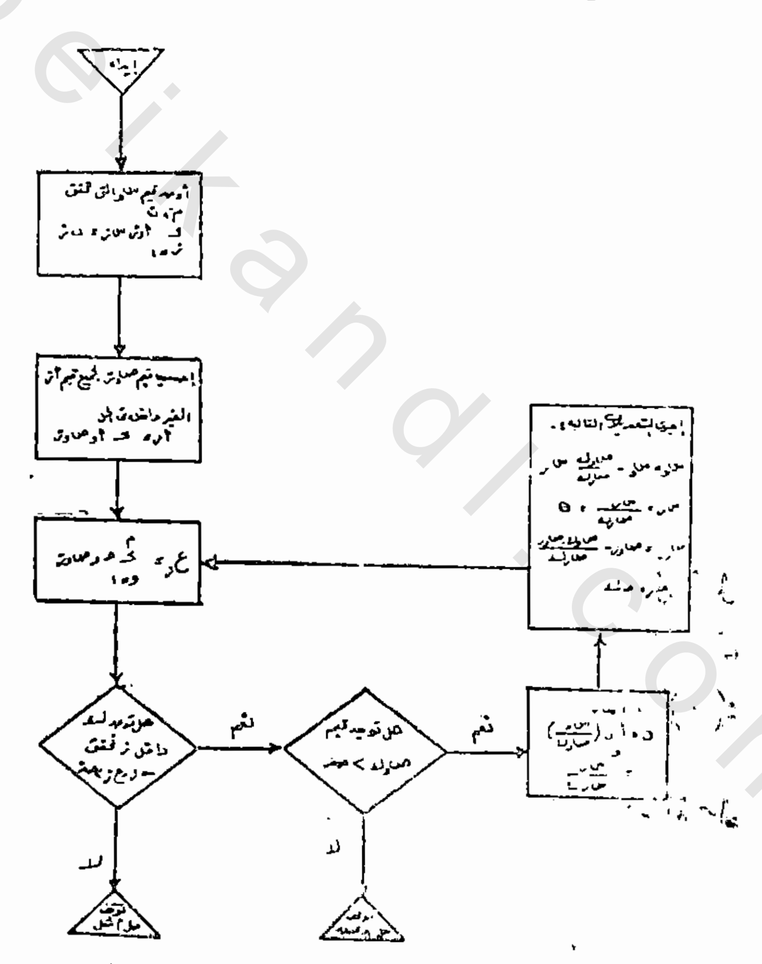
٢ — جميع المعاملات الواقعة على صف المفصل قسم على المفصل .

٣ — أى معامل آخر يستخدم فى تحديده القاعدة التالية :

المعامل الجديد = المعامل السابق —

$$\frac{\text{القيمة الواقعة على عامود المفصل وصف المعامل} \times \text{القيمة الواقعة على صف المفصل وعامود المعامل}}{\text{قيمة المفصل}}$$

٤ — تتحدد قيمة س(١)ر الجديدة من العلاقة س(١)و — θ أوك ، ماعدا س(١)ك فهى تساوى θ



شكل (١) خطوات الحل بطريقة السمبلكس

مثال (١) :

حل مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\text{عظم } ع = 2س_1 + س_2 + 5س_3$$

مستوفيا

$$س_1 + س_2 + س_3 \leq 12$$

$$س_2 + 3س_3 \leq 9$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 \geq \text{صفر}$$

وتصبح المسألة بعد إضافة المتغيرات العاطلة :

$$\text{عظم } ع = س_1 + س_2 + 5س_3 + 0 \times س_4 + 0 \times س_5$$

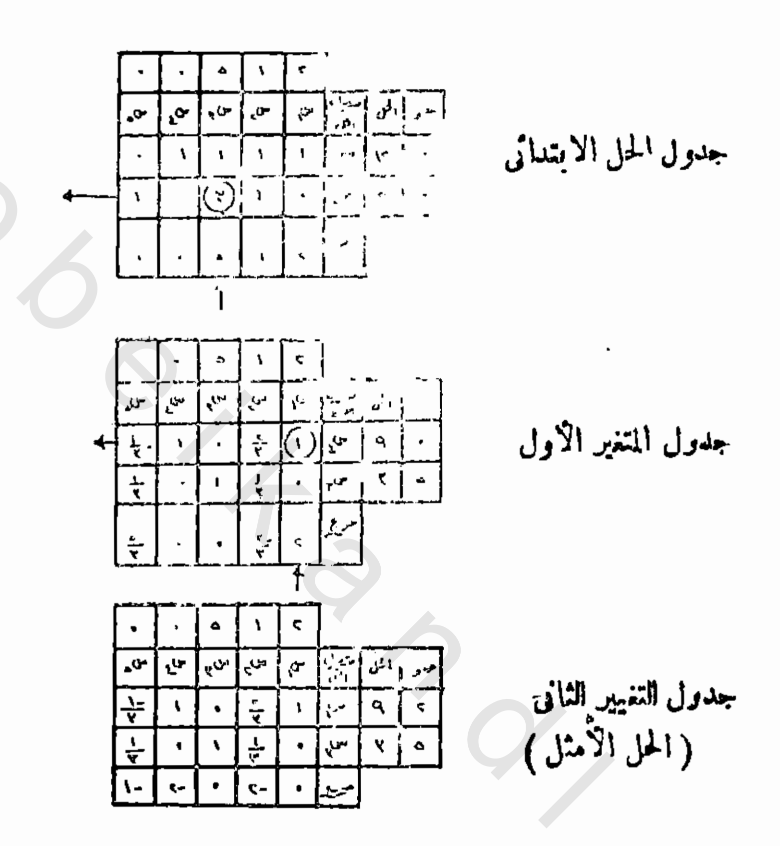
مستوفياً

$$س_1 + س_2 + س_3 + س_4 = 12$$

$$س_2 + 3س_3 + س_5 = 9$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 \geq \text{صفر}$$

ونبين خطوات حل المسألة بالجداول الآتية :



(٣ — ٣) بعض الملاحظات الهامة :

(ا) فى حصولنا على الحل الابتدائى إفترضنا أن يكون الحل الابتدائى موجب وذلك بفرض أن $ب_و$ > صفر لجميع قيم و = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، م كذلك $ا_{و ر}$ > صفر لقيم ر = ن + و ، ولا يتوافر هذا الشرط بإستمرار فمثلا إذا كانت المتباينة بالصورة ≥ صفر كما هو موضح فى المتباينة التالية :

$$ال_1 س_1 + ال_2 س_2 + \cdots + ال_ن س_ن \geqslant ب_ل \qquad (18)$$

حيث ب ل موجبة . ولتحويل المتباينة (١٨) إلى معادلة نطرح المتغير العاطل س ن + ل على الصورة :

$$ا ل_١ س_١ + ا ل_٢ س_٢ + ... + ا ل ن س ن - س ن + ل = ب ل \qquad (١٩)$$

وبوضع جميع المتغيرات الهيكلية س١ ، س٢ ، ... ، س ن = صفر . فإن الحل الابتدائي يكون محتويا للقيمة س ن + ل = - ب ل وبالتالي تكون س ن+ل سالبة أي لا تحقق شرط عدم السلبية المطلوب وبالتالي يكون الحل الابتدائي السابق حل غير عملي أو غير مقبول ولحل هذه المشكلة يضاف متغير آخر يسمى بالمتغير الوهمي س م ل وتصبح المعادلة (١٩) على الصورة :

$$ا ل_١ س_١ + ا ل_٢ س_٢ + ... + ا ل ن س ن - س ن + ل + س م ل = ب ل \qquad (٢٠)$$

وبوضع س١ ، س٢ ، ... ، س ن ، س ن + ل = صفر . فإن الحل الابتدائي يكون محتويا س م ل = ب ل أي موجب ويحقق شرط عدم السلبية وبذلك يكون حل مقبول . إلا أن هذا المتغير س م ل يجب ألا يظهر في الحل النهائي للمسألة لأن معنى ظهوره هو خرق للقيد (١٨) ولكي نضمن عدم ظهور فإننا نصاحبه بجزاء في دالة الهدف فإذا كان المطلوب تعظيم دالة الهدف يصاحب س م ل وزن سالب - ك وإذا كان المطلوب تدنية دالة الهدف يصاحبه وزن موجب + ك حيث ك رقم كبير جداً بحيث أن ضربه في س م مهما كان صغيراً يجعل الناتج عدد كبير بحيث لا يمكن تحت أي ظرف من الظروف تحقيق المثالية في وجود س م ل وتكون دالة الهدف على الصورة :

$$ع = \sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \, س_ر + \sum_{ر=ن+1}^{ن+م} س_ر \times صفر \mp$$

$$ك \sum_{ل} س_{هل} \qquad (٢١)$$

حيث تأخذ ك إشارة سالبة إذا كان المطلوب تعظيم ع وإشارة موجبة إذا كان المطلوب تدنية ع .

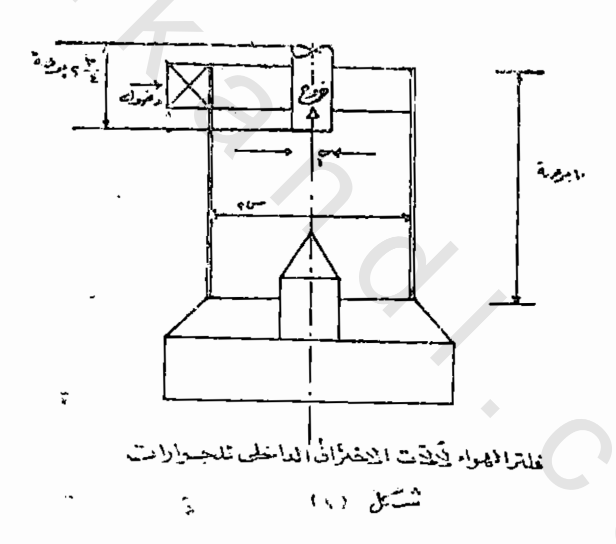
(II) بتطبيق نفس الأسلوب السابق فى حالة وجود القيد على شكل معادلة حيث يضاف متغير وهمى وذلك لإمكان جعل جميع المتغيرات الهيكلية مساوية للصفر . على ألا يظهر هذا المتغير فى الحل الأخير وذلك باستخدام طريقة ك الكبيرة سابقة الذكر .

(III) فى اقتراحاتنا السابقة كان قيد عدم السلبية صفة ضرورية $س_ر > 0$ إلا أنه فى بعض التطبيقات يمكن أن تأخذ بعض قيم $س_ر$ قيما سالبة أو موجبة وتسمى فى هذه الحالة بأنها متغيرات غير مقيدة الإشارة . ولما كانت طريقة السمبلكس مبنية على أساس القيد $س_ر \geqslant$ صفر . لذلك فأنه يلزم بعض التصرف للمحافظة على هذا القيد ويتم ذلك باعتبار كل متغير غير مقيد الاشارة إنه ناتج طرح متغيرين موجبين . فإذا كان $س_ر$ غير مقيد الاشارة فإننا نضع $س_ر = س'_ر - س''_ر$ حيث $س'_ر$ ، $س''_ر \geqslant$ صفر فإذا كانت $س'_ر > س''_ر$ كانت $س_ر$ موجبة وإذا كانت $س'_ر < س''_ر$ كانت $س_ر$ سالبة . ومعنى هذا أن كل متغير غير مقيد الاشارة يستبدل بمتغيرين ونطبق عليهم قيد عدم السلبية ثم يتم الحل بطريقة السمبلكس كالمعتاد .

مثال (٢) :

استخدام البرمجة الخطية فى إنتاج وتصميم مرشحات (فلاتر) الهواء لآلات الاحتراق الداخلى للجرارات * :

المسألة موضع الدراسة تبين كيفية استخدام البرمجة الخطية فى تصميم فلاتر الهواء الخاصة بالجرارات بطريقة تختلف عن الطرق التقليدية . حيث تتضمن بالاضافة إلى متطلبات التصميم الرئيسية والتى تتلخص فى كفاءة تجميع الأتربة والفقد المسموح به فى الضغط إضافة بعض القيود الحقيقية التى تواجهها الشركة المصنعة للفلاتر مثل النقص فى المواد الخامة المتاحة ومتطلبات التصنيع التى يحددها الحد الأدنى المطلوب شهريا .



فلتر الهواء لآلات الاحتراق الداخلى للجرارات

شكل (١)

إن المواصفات المحدد للفلتر تنص على أن الأقطار الأساسية لفتحة خروج س١ وجسم الفلتر س٢ يجب إلا تزيد عن ٦ ١/٤ و ٢ ٣/٤ بوصة على التوالى وذلك لكى تكون كفاءة تجميع الأتربة فى حدودها المسموح بها .

---

* مجلة بحوث العمليات الأمريكية

Volume 22 Nos March . aprile 1974 (orsa)

كذلك يجب ألا تقل $س_١$ ، $س_٢$ عن $١\frac{١}{٢}$ بوصة ، $٢\frac{٣}{٤}$ بوصة على الترتيب وذلك لتقليل الفقد فى الضغط وجعله فى حدودة المسموح بها . وتتطلب ظروف الحيز المتاح للفلتر فى التصميم أن يكون ارتفاع جسم الفلتر ١٠ بوصة وارتفاع قناة الخروج $٢\frac{٣}{٤}$ بوصة وبالإضافة إلى قيود التصميم السابقة فإن المتعاقد يطلب توريد ٥٠ فلتر على الأقل شهريا ، بينما لا تزيد المخصصات للمواد الخام المستخدمة فى صناعة الفلتر عن ١٥٠٠٠ بوصـــة شهريا ، بفرض أن ٤٠ ٪ من المعدن يستخدم فى إجزاء أخرى مكملة للفلتر وأن ٢٠ ٪ يمثل الهالك من المعدن . فإن كل المساحات يجب ضربها فى ٦و١ لحساب إحتياجات المعدن .

وبالرغم من أنه عند إنتاج الفلتر يكون الهـــدف هو جعل كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن إلا أن بعض الاعتبارات الأخرى تلزمنا إلا تقل مساحة المعدن المستخدم عن ٢٥٠ بوصة مربعة .

أى دالة الهدف يمكن أن تكون :

$$ع = حـ\, ط\, (ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢) \quad \text{حيث :}$$

$ل_١$ ، $ل_٢$ ارتفاع قناة الخروج والفلتر ، $س_١$ ، $س_٢$ قطر قناة الخروج والفلتر ، ط النسبة التقريبية ، حـ هى نسبة الإضافة للفقد والعوامل الأخرى فى الخامة . وفى حالتنا $ل_١ = ٢\frac{٣}{٤}$ ، $ل_٢ = ١٠$ ، حـ = ٦و١ وبذلك تكون دالة الهدف $ع = ١٣,٨٤\, س_١ + ٢٤و٥٠\, س_٢$

أما القيود فهى : ١) قيود تصميم :

$$١,٥ \leqslant س_١ \leqslant ٢و٥$$

$$٣و٧٥ \leqslant س_٢ \leqslant ٦و٢٥$$

٥ — قيود مساحة المعدن

حيث يجب ألا تزيد مساحة الـ ٥٠ قطعة عن ١٥٠٠٠ بوصة مربعة المتاحة :

٥٠ × ١,٦ [٢,٧٥ ط س$_{1}$ + ١٠ ط س$_{2}$] > ١٥,٠٠٠

كذلك يجب ألا تقل المساحة عن ٢٥٠ بوصة مربعة للقلق الواحد أى :

١,٦ [٢,٧٥ ط س$_{1}$ + ١٠ ط س$_{2}$] ≤ ٢٥٠

وبذلك يكون النموذج الرياضى للمسألة هو :

تدنية :

ع = ١٣,٨٤ س$_{1}$ + ٢٤,٥٠ س$_{2}$

مستوفيا

س$_{1}$ ≤ ١,٥ ، س$_{1}$ > ٢,٢٥

س$_{2}$ ≤ ٢,٧٥ ، س$_{2}$ > ٦,٢٥ (١٢)

١٣,٨٤ س$_{1}$ + ٢,٥٠ س$_{2}$ > ٢٥٠

٦٩٠ س$_{1}$ + ١٥١٠ س$_{2}$ > ١٥٠٠٠

س$_{1}$ ، س$_{2}$ ≤ صفر

أى :

تدنيه :

ع = ١٣,٨٤ س١ + ٥٠,٢٤ س٢ + ٠ × س٣ + ٠ × س٤ + ٠ × س٥ + ٠ × س٦ + ٠ × س٧ + ٠ × س٨ + ك سهـ١ + ك سهـ٢ + ك سهـ٣

مستوفيا

س١ + س٣ = ٢,٥

س١ − س٤ + سهـ١ = ١,٥

س٢ + س٥ = ٦,٢٥

س٢ − س٦ + سهـ٢ = ٣,٢٥

١٣,٨٤ س١ + ٢,٥ س٢ − س٧ + سهـ٣ = ٢٥٠

٦٩٠ س١ + ٢٥١٠ س٢ + س٨ = ١٥٠٠٠

والحل يعطى بالجداول التالية :

حو	متغيرات الحل	الحل	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	سهـ١	سهـ٢	سهـ٣
		حـ ن	١٣,٨٤	٥٠,٢٤	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	ك	ك	ك
٠	س٣	٢,٥	١	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ك	سهـ١	١,٥	١	٠	٠	-١	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠
	س٥	٦,٢٥	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ك	سهـ٢	٣,٢٥	٠	١	٠	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١	٠
ك	سهـ٣	٢٥٠	١٣,٨٤	٢,٥	٠	٠	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١
	س٨	١٥٠٠٠	٦٩٠	٢٥١٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠
	ستبات الحل ع ـ حـ		[illegible]	[illegible]	صفر	ـ ك	صفر	ـ ك	ـ ك	صفر	صفر	صفر	صفر

حد	متغيرات الحل	حد	١٣,٨٤	٥,٢٤	١٠	٠	٠	٠	٠	٠	ك	ك	ك
حد	متغيرات الحل	الحل	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	س٩	س١٠	س١١
٠	س٣	١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١٠	٠	٠
١٣,٨٤	س١	١,٥	١	٠	٠	١٠	٠	٠	٤	٠	١	٠	٠
٠	س٢	٦,٢٥	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ك	س٦	٢,٧٥	٠	٦	٠	٠	٠	١٠	٠	٠	٠	١	
ك	س١٠	٢٩٦,١٦	٠	٥,٢٤	٠	٠	٠	٠	١٠	٤	١٤٨٠-	٠	١
	س١١	١٤٣,١٠	٠	٢٥١	١	٠	٠	٠	٠	١	٩٩٠-	٠	٠
	إشارات الحل غ ز - ح ز		٠	+		-	٠	-	-	٠	-	٠	٠

حد	متغيرات الحل	حد	١٣,٨٤	٥,٢٤	٠	٠	٠	٠	٠	٠	ك	ك	ك
حد	متغيرات الحل	الحل	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	س٩	س١٠	س١١
	س٣	١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١٠	٠	٠
١٣,٨٤	س١	١,٥	١	٠	٠	١٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠
	س٥	٢,٥	٠	٠	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٥,٢٤	س٢	٢,٧٥	٠	١	٠	٠	٠	١٠	٠	٠	٠	١	٠
ك	س١٠	٢٤,٧٦	٠	٠	٠	٠	—	٥,٢٤	١٠	٠	١٣,٨٤-	٥,٢٤	١
٠	س١١	٤٨٨٩,٠	٠	٠	٠	٠	٠	٢٥١	٠	١	٦٦٠-	٢٥١-	٠
	غ ز - ح ز		٠	٠		-	٠	+	-	٠	-	-	٠

حد	متغيرات الحل	حد	١٣,٨٤	٥,٢٤	٠	٠	٠	٠	٠	٠	ك	ك	ك
حد	متغيرات الحل	الحل	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	س٩	س١٠	س١١
٠	س٣	١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١٣,٨٤	س١	١,٥	١	٠	٠	١٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠
	س٥	١,٥٤	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٥,٢٤	س٢	٤,٦٩	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠
	س٦	٠,٩٤	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠,٠٢-	٠	١,٣٥-	١-	٠,٠٢
	س١١	٤٥٢٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٤٨,٦٦	١	٠	٠	١٤,٦٦
	غ ز - ح ز		٠	٠	٠	-	٠	٠	٠	-	-	-	-

والحل الأمثل للمسألة يعطى من الجدول الأخير السابق $س_1 = ٥,١$ ، $س_2 = ٤,٦٩$ ، ونظراً لأن المسألة السابقة هي تدنية فإنه عند إختيار المتغير الذى يدخل فى الحل الجديد نأخذ فى أعتبارنا القيم التى لها $ع_ر - ح_ر >$ صفر . ويكون الحل حلا أمثل عندما تكون جميع القيم $ع_ر - ح_ر \leq$ صفر .

(٣ — ٤) الحلول الحلقية أو الترددية (الاستحالة أو التفسخ) وكيفية التخلص منها

قد نواجه بالتردد فى الحل (أى دخول وخروج المتجهات دون حدوث تحسن فى دالة الهدف) ويعرف ذلك التردد بأنه مسألة الاستحالة أو التفسخ فى مسألة البرمجة الخطية) وذلك إذا كان أحد المتجهات الأساسية $ا_م$ الداخلة فى الحل والمكونة من $ا_1$ ، $ا_2$ ، ... ، $ا_م$ يمكن الحصول عليه بواسطة تجميع خطى لباقى المتجهات ومعنى ذلك وجود ثوابت $\lambda_ك$ $ا_ك$ = صفر (٢٢)

وفى هذه الحالة يمكن الحصول على حل مكون من متغيرات مستقلة عددها $م - ١$ أو أقل .

ومعنى هذا أن قيمة θ المحسوبة من المعادلة (١٠) لا تكون وحيدة القيمة ، ويؤدى ذلك إلى تكرار الحصول على نفس المجموعة من المتغيرات الأساسية فى الحل دون تحسين فى دالة الهدف .

والحلول الحلقية فى مسألة البرمجة الخطية لا تشكل أى خطورة عملية . لأن الحل الأساسى الجديد فى ($م - ١$) أو أقل من المتغيرات يكون حلا أساسيا وبالتالى يمكن الحصول منه على الحل الأمثل . ولكن المطلوب هو إيجاد طريقة لضمان عدم تكرار نفس الحل عدة مرات ، ويتم ذلك بواسطة ترتيب المتجهات بطريقة تمنع تكرار الحل .

أكثر هذه الطرق استخداما هى الطريقة التى إستحدثها شارنز* والتى فيها يستبدل متجه التطابات (ب) بآخر ب (ت) .

حيث :

$$ب(ت) = ب + \sum_{ر=1}^{ن+ف} ت^ر أ_ر \quad ، \quad ن+ف \geq ز + م \qquad (٢٣)$$

لأنه فى الواقع تنشأ قيمة θ الغير وحيدة من طبيعة قيم عناصر المتجه ب . وبإضافة كثيرة الحدود فى ت بمعاملات أ ر المتجه ب حيث ت مقدار موجب صغير يبدأ ت حـت عظمى مسموح بها للمسألة • يمكن تغير قيم ب لمنع حدوث الحلول الحلقية فى هذه الحالة يعطى الحل الأساسى س هـ بالمقدار س هـ (ت)

$$س_هـ(ت) = س_هـ + \sum_{ر=1}^{ن+ف} ت^ر ص_ر \qquad (٢٤)$$

بينما تعطى دالة الهدف بالعلاقة (ت) . حيث :

$$ع(ت) = ع + \sum_{ر=1}^{ن+ف} ت^ر ع_ر \qquad (٢٥)$$

وعند الحصول على الحل الأخير الذى فيه جميع قيم ع ر — حـ ر ≥ صفر (فى مسألة التعظيم) نضع ت = صفر فنحصل على الحل الأمثل . ويتضح من

(Management Models and Industnial Application of Lineaʀ Programming)

CHARNES AND Cooper

hn & Wiley ard Sons 1967

ذلك أن طريقة ت . الصغيرة فائدتها أساساً هو ترتيب المتجهات بصورة تمنع تكرار الحل . ولا تؤثر فى قيمة الحل الأمثل أو المتجهات الداخلة فى الحل .

ومن الناحية الهندسية تنشأ صعوبة الحل عندما يؤدى متجه المتطلبات إلى نقطة قصوى تخص أكثر من حل أساسى وتؤدى طريقة ت . إلى تحويل هذه النقط القصوى إلى مجموعة من النقط القصوى المتقاربة يمكن من خلالها التحرك من نقطة قصوى إلى أخرى وبذلك تمنع استحالة الحل .

(٢—٥) طريقة السمبلكس المعدلة* :

طريقة السمبلكس المعدلة استحدثت أساسا لتقليل الجهد الحسابى ونقصد به مقدار العمليات الخاصة بالضرب والقسمة التى نجريها عند كل عملية تغيير فى الحل بطريقة السمبلكس .

والإضافة الرئيسية لطريقة السمبلكس المعدلة هى اعتبارها دالة الهدف أنها أحد القيود . وفى حين أن الأساسية المستخدمة فى الحل تكون بأبعاد م فى طريقة السمبلكس فإنها فى طريقة السمبلكس المعدلة تكون بأبعاد (م+١) وسوف يتضح أهمية هذا الأسلوب فيما يلى :

مسألة البرمجة التقليدية معبراً عنها بجبر المصفوفات هى :

$$\left.\begin{array}{l} \text{عظم} \quad ع = حـ \, س \text{ مستوفيا} \\ ا \, س = ب \\ س \geqslant \text{صفر} \end{array}\right\} \qquad (٢٦)$$

* Hadly (Linear Programming), Addison - Wesly 1963

ويمكن كتابة مسألة البرمجة السابقة على صورة مجموعة من المعادلات الجبرية :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ع} - \text{حـ}_1\text{س}_1 - \text{حـ}_2\text{س}_2 - \cdots - \text{حـ}_\text{ن}\text{س}_\text{ن} = \text{صفر} \\ \text{ا}_{11}\text{س}_1 + \text{ا}_{21}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} = \text{ب}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ا}_{1\text{م}}\text{س}_1 + \text{ا}_{2\text{م}}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{م}}\text{س}_\text{ن} = \text{ب}_\text{م} \end{array}\right\} \quad (٢٧)$$

ومجموعة المعادلات السابقة مكون من مجموعة من المعادلات مقدارها ن + ١ (القيود + دالة الهدف) فى متغيرات عددها م + ١ [ع ، س₁ ، س₂ ، ... ، سم] ويمكن وضع المعادلات (٢٧) بصورة أكثر ملاءمة بوضع ع = س₁ ، حـر = ا.ر حيث تؤول إلى :

$$\left.\begin{array}{l} [\text{illegible}] - \text{ا}_{.1}\text{س}_1 - \text{ا}_{.2}\text{س}_2 - \cdots - \text{ا}_{.\text{ن}}\text{س}_\text{ن} = \text{صفر} \\ \text{ا}_{11}\text{س}_1 + \text{ا}_{21}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} = \text{ب}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ا}_{1\text{م}}\text{س}_1 + \text{ا}_{2\text{م}}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{م}}\text{س}_\text{ن} = \text{ب}_\text{م} \end{array}\right\} \quad (٢٨)$$

ويمكن وضع (٢٨) على شكل المصفوفة المجزءة (راجع المصفوفات) [illegible] الصورة التالية :

$$\begin{bmatrix} ١ & \text{ا} \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{سـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{ب} \end{bmatrix} \quad (٢٩)$$

أى :

$$\begin{bmatrix} ١ & -\text{حـ} \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ع} \\ \text{سـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{ب} \end{bmatrix} \quad (٣٠)$$

[illegible] حيث المصفوفة ا مكونة ن مجموعة المتجهات ار . وفى الواقع يمكننا تعريف

مجموعة متجهات جديدة

$$\bar{ا}_ر = [-حـ_ر ، ا_ر] = [ا.ر ، ا_ر] \quad (٣١)$$

وبالتالى يكون لدينا لأى مصفوفة أساسية $ا_م$ للمتغيرات الداخلة فى الحل مصفوفة $[\bar{ا}هـ]$ تعرف بمجموعة المتجهات $[\bar{ا}هـ] = (و_١ ، \bar{ب}_١ ، \bar{ب}_٢ ، ... ، \bar{ب}_ن)$ وثوابت دالة الهدف للمتغيرات فى الأساسية $حـ_م$

$$هـ_١ = \begin{bmatrix} ١ \\ \vdots \end{bmatrix} ، [\bar{ا}هـ] = \begin{bmatrix} ١ & -حـ_م \\ صفر & ا_م \end{bmatrix} \quad (٣٢)$$

ومنها من جبر المصفوفات :

$$[\bar{ا}هـ]^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & حـ_م (ا_م^{-١}) \\ صفر & (ا_م^{-١}) \end{bmatrix} \quad (٣٣)$$

وبوضع المعادلة التعريفية

$$\bar{ص}_ر = [\bar{ا}_م]^{-١} \bar{ا}_ر \quad (٣٤)$$

وبالتعويض من (٣٣) فى (٣٤) نحصل على :

$$\bar{ص}_ر = \begin{bmatrix} ١ & حـ_م (ا_م^{-١}) \\ صفر & (ا_م^{-١}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -حـ_ر \\ ا_ر \end{bmatrix}$$

أى :

$$\bar{ص}_ر = \begin{bmatrix} -حـ_ر + حـ_م (ا_م^{-١}) ا_ر \\ (ا_م^{-١}) ا_ر \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ع_ر - حـ_ر \\ ص_ر \end{bmatrix}$$
(٣٥)

ويلاحظ فى المعادلة (٣٥) أن الصف الاول لقيم المعاملات الجديد $ص^{-}_{ى}$ هو فى الواقع مقيمات دالة الهدف $ع_{ر} - ح_{ر}$.

وعند الحصول على الحل الإبتدائى يوضع المتغيرات الهيكلية مساوية للصفر فإن المصفوفة الأساسية $ا^{-}_{م}$ للحل الإبتدائى تكون :

$$ا^{-}_{م} = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ى_{م} \end{bmatrix} ، \quad ح_{م} = صفر$$

وبذلك فإن المصفوفة $[ا^{-}_{م}]^{-١} = ى_{م+١}$ ، $س^{-}_{هـ} = (ح_{م} ب_{م} ب)$ $=$ (صفر ، ب) وابداية الحل السمبلكس نضرب الصف الأول للمصفوفة ($ب^{-}$) فى أعمدة $ا_{ر}$ التى لا تدخل فى الحل وذلك لتحديد قيمة :

$ع_{ك} - ح_{ك} = $ أقل $[ع_{ر} - ح_{ر}]$ ولاحظ أن $س_{.} = ع$ تكون فى العمود الأول من $ا^{-}_{م}$ ولا تدخل فى الحل . وبتحديد ك يتم حساب $ص^{-}_{ك} =$ $[ا^{-}_{م}]^{-١} ا^{-}_{ك} = [ع_{ك} - ح_{ك} ، ص_{ك}]$ فقط وأما المتجه الذى يترك الأساسية فيعطى من العلاقة $\frac{س_{رك}}{ص_{رك}} =$ أقل و $\left[\frac{س_{وك}}{ص_{وك}} ، ص_{وك} \gtrsim صفر\right]$

ثم يتم حساب قيم $ص_{ور}$ بنفس طريقة بجوء المعادلات (١٥)

مثال (٣) :

استخدم طريقة السمبلكس المعدلة لحل مسألة البرمجة الخطية التالية :

اجعل $ع = ٢س_{١} + س_{٢}$ أكبر ما يمكن مستوفيا

$$٣س_{١} + س_{٢} \geqslant ٦$$

$$٦س_{١} + س_{٢} > ٢$$

$$س_{١} ، س_{٢} \geqslant صفر$$

الحل :

ضع المسألة على صورة السمبلكس المعدلة .

$$س_٠ - ٢س_١ - س_٢ = \text{صفر}$$

$$٣س_١ + ٤س_٢ + س_٣ = ٦$$

$$٦س_١ + س_٢ + س_٤ = ٢$$

$$س_١ ، س_٢ \geqslant \text{صفر}$$

$$أ_{هـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = أ_{هـ}^{-1} \quad ، \quad حـ_{هـ} = (٠ ، ٠) ؛$$

$$\bar{أ}_{هـ} = \begin{bmatrix} ٠ & & ٠ & \vdots & & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & \vdots & ٠ & ٠ \\ ٠ & & ١ & \vdots & & ٠ \\ ١ & & ٠ & \vdots & & ٠ \end{bmatrix} = [\bar{أ}_{هـ}]^{-1}$$

$$\bar{أ}_١ = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad \bar{أ}_٢ = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$ع_١ - حـ_١ = -٢ \quad ، \quad ع_٢ - حـ_٢ = -١ \quad ، \quad ص_{(١)} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

، أقل $[\frac{٦}{٣} ، \frac{٢}{٦}] = \frac{١}{٣}$. المتغير الذي يترك الأساسية هو $س_٤$ ويحل محله $س_١$.

ثم نحسب فيه $\bar{أ}_{٢} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣٫٥ \\ \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$ ، أقل $\left[\frac{٤٫٥}{٣٫٥} ، (\frac{١}{٢})/(\frac{١}{٦})\right]$

$= \frac{٩}{٧}$ ومنها نحصل على الحل الأمثل .

$\begin{bmatrix} ع \\ س_{١} \\ س_{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٣}{٧} \\ \frac{٩}{٧} \\ \frac{٢}{٧} \end{bmatrix}$. ويمكن تلخيص الحل بجدول بنفس أسلوب السمبلكس . كما هو موضح بالجداول الثلاثة التالية ويلاحظ أن أى جدول لا يحتوى على كل المعلومات ولكن يحتوى فقط على المعلومات التى تفيد فى مرحلة الحل فقط . لذلك يلزمنا بإستمرار إجراء حسابات المتغيرات $\bar{أ}_{ر}$ التى لا توجد فى الأساسية جانبيا .

	أ.	$أ_{١}$	$أ_{٢}$	الحل	$\bar{ص}_{١}$
$س_{.} = ع$	١	٠	٠	٠	−٢
$س_{٣}$	٠	١	٠	٦	٣
$س_{٤}$	٠	٠	١	٣	٦*

الحل الإبتدائى

	ا.	ا١	ا٢	الحل	ص٢
س. = ع	١	٠	$\frac{1}{3}$	١	$-\frac{2}{3}$
س٢	٠	١	$-\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$
س١	٠	٠	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

	ا.	ا١	ا٢	الحل
س. = ع	١	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{3}{7}$
س٢	٠	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$
س١	٠	$-\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$

الحل الأمثل

(٣ – ٦) المتغيرات الوهمية وأسلوب المرحلتين فى طريقة السمبلكس :

للتخلص من المتغيرات الوهميه استخدمنا فى ما سبق طريقة ك الكبيرة وذلك للتأكد من أن ظهور المتغيرات الوهمية فى الحل ستؤدى بالضرورة إلى عدم حصولنا على القيمة القصوى لدالة الهدف سواء كان ذلك فى مسألة تعظيم أو التدنية . وفى حالة استخدام الحسابات العددية بجدول السمبلكس لا يلزمنا أن نحدد أى قيمة لـ ك حيث يمكن بمجرد النظر لوجود ك فى المقيمات للحل التخلص من المتغيرات الوهمية واحد تلو الآخر والتأكد من عدم عودتها للحل .

وفى حالة استخدام الحاسبات الآلية يلزمنا أن نحدد قيمة لـ ك فمثلا لو جعلناها ١٠٠٠ مره قيمة أكبر ثابت فى دالة الهدف فإننا سوف نحصل على شكل المقيمات على الصورة (ح ك + ط) وكلما كبرت ك للتأكد من أن المتغيرات الوهمية لا تدخل فى الحل فإن المقدار ح ك يكون كبيراً جداً وبالتالى فإن تأثير ط فى حالة وجود تقريب للقيم داخل الحاسب الآلى يؤدى إلى حدوث أخطاء ولتوضيح ذلك فى ذهن القارىء افترض أن ح ك = ٣١٧٤٥ مثلا وأن ط = ٢,٧٤٣٢ وأن الحاسب الآلى سوف يقرب إلى خمسة أرقام ١٠ لقيمة ح ك + ط فى هذه الحالة سوف تكون ٣١٧٤٥ + ٢,٧٤٣٢ ولكن نظراً للتقريب فإن الكسر ٧٤٣٢, سوف يختفى وعند التخلص فى جميع المتغيرات العاطلة تصبح مقيمات الحل ع ر – ح ر لا تحتوى على ك فى الأساسية وبذلك يكون تأثير الكسر الذى اختفى فى عملية التقريب السابق مؤثر فى تحديد الحل الأمثل . فإذا حاولنا تقليل قيمة ك لمنع العيب السابق واجهنا مشكلة إمكانية وجود المتغيرات الوهمية فى الحل النهائى

ولهذا السبب استحدثت طريقة المرحلتين لحل مسألة البرمجة الخطية بإستخدام

الحاسب الآلى فى حالة وجود متغيرات وهمية حيث فى المرحلة الأولى يتم التخلص من جميع المتغيرات الوهمية والحصول على حل أساس خالى من المتغيرات الوهمية وفى المرحلة الثانية يتم تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل .

المرحلة الأولى :

فى هذه المرحلة يتم استحداث دالة هدف للمتغيرات الوهمية على الصورة :

$$ع^{\circ}_{هـ} = \sum_{ل=١}^{ف} - س هـ_{ل}$$

$$= - س هـ_{١} - س هـ_{٢} - \cdots - س هـ_{ف} \qquad (٣٦)$$

حيث ف عدد المتغيرات الوهمية فى مسألة البرمجة الخطية .

حيث يكون المطلوب تعظيم (٣٦) والوفاء بمجموعة القيود المفروضة على المسألة . هذه المرحلة تعطى الحل الأمثل :

$$ع^{\circ}_{هـ} = صفر \qquad (٣٧)$$

حيث واضح أنه للحصول على القيمة العظمى للدالة (٣٠) يجب أن تؤول جميع المتغيرات التى عددها ف الوهمية إلى صفر فإذا كانت $ع^{\circ}_{هـ}$ < صفر فإنه لا يوجد حل مناسب للمسألة إما إذا كانت $ع^{\circ}_{هـ}$ = صفر . فإما أن تختفى المتغيرات الوهمية من الأساسية أو تظهر بقيم صفرية وفى هذه الحالة الأخيرة يكون معنى هذا وجود قيود مكررة (غير مستقلة) . وفى الحالتين يتوفر لديا حل مناسب للدخول للمرحلة الثانية .

المرحلة الثانية :

فى هذه المرحلة تكون دالة الهدف تحتوى على المتغيرات الهيكلية بثوابتها حـز . وتعطى قيم صفرية لثوابت المتغيرات الوهمية إذا ظهرت فى الحل الاساسى للمرحلة الأولى . ودالة الهدف المطلوب إيجاد القيمة اقصوى لها هى دالة الهدف الحقيقية ع : ويكون الجدول الأول فى المرحلة الثانية هو الجدول الأخير فى المرحلة الأولى مع تغيير قيمة عز ـ حز نظراً لتغير قيم الثوابت للمتغيرات فى الأساسية حم حيث عز ـ حز = حم صز ـ حز وفى حالة عدم وجود متغيرات وهمية لقيم صفرية فى الحل لأساسى المرحلة الأولى لا توجد لدينا مشكلة على الاطلاق وتستمر فى الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل . أما فى حالة وجود متغيرات وهمية قيم صفرية فى الحل الناتج من المرحلة الأولى يلزم التأكد باستمرار من عدم ظهور المتغيرات الوهمية بقيم موجبة فى الحل . ويتم ذلك بمنع دخول متغير فى الحل له قيم صر ب سالبة عند المتغير الوهمى حيث فى هذه الحالة بدلا من إزالة أى متغير هيكلى يتم إزالة المتغير الوهمى ذو قيم صرك السالبة والتخلص منه فى الحل .

هذه الطريقة يمكن باستمرار التأكد من فاعليتها فى حالة الحل اليدوى بجدول السمبلكس بينما تشكل صعوبة كبيرة فى حالة إستخدام الحاسبات الآلية .

ونظراً لاننا سبق أن ذكرنا أن معظم برامج الحاسبات الآلية تستخدم طريقة السمبلكس المعدلة لاختصارها الجهد الحسابى فسوف نذكر فيما يلى طريقة السمبلكس المعدلة فى معالجة المتغيرات الوهمية . وهى نفس أسلوب المرحلتين السابق حيث فى المرحلة الأولى تكون مسألة السمبلكس المعدلة هى :

(٣٨)

س هـ. + س هـ١ + س هـ٢ + ... + س هـ ف = ٠
س هـ١ + ا١١ س١ + ... + ا١ن سن = ب١
س هـ٢ + ا١٢ س١ + ... + ا٢ن سن = ب٢
. . . .
س هـ ف + اف١ س١ + ... اف ن سن = ب ف
. . . .
ام١ س١ + ... + ام ن سن = ب م

والمطلوب فى المرحلة الأولى هو الحصول على حل أساسى يحتوى على س هـ. أكبر ما يمكن. وتنتهى هذه المرحلة بأن تكون س هـ. = صفر، وجميع المتغيرات الوهمية التى عددها ف = صفر ونحصل على حل أساسى لا يحتوى على متغيرات وهمية فى الأساسية أو يحتوى على متغيرات وهمية بقيم صفرية وفى المرحلة الثانية تكون مسألة السمبلكس المعدلة هى :

(٣٩)

س. − ح١ س١ − ح٢ س٢ − ... − حن سن = صفر
س م١ + س م٢ + ... س م ف = صفر
ا١١ س١ + ا٢١ س٢ + ... + ا١ن سن + س م١ = ب١
ا١٢ س١ + ا٢٢ س٢ + ... + ا٢ن سن + س م٢ = ب٢
. . . .
اف١ س١ + اف٢ س٢ + ... + اف ن سن + س م ف = ب ف
. . . .
ام١ س١ + ام٢ س٢ + ... + ام ن سن = ب م

ويلاحظ أن القيد س م١ + ... س م ن = صفر أضيف فى المرحلة الثانية للتأكد من عدم ظهور المتغيرات الوهمية فى أى مرحلة من مراحل الحل عند استخدام الحاسبات الآلية.

(٣ — ٧) الثنائية واختبارات الحساسية :

مسألة البرمجة الخطية على الصورة :

أجعل :

$$\text{ع}_1 = \text{ح}_1\text{س}_1 + \text{ح}_2\text{س}_2 + \cdots + \text{ح}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}$$

اكبر ما يمكن مستوفياً

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ا}_{11}\text{س}_1 + \text{ا}_{21}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_\text{ن} \leqslant \text{ب}_1 \\
\text{ا}_{12}\text{س}_1 + \text{ا}_{22}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}2}\text{س}_\text{ن} \leqslant \text{ب}_2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\text{ا}_{1\text{م}}\text{س}_1 + \text{ا}_{2\text{م}}\text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{م}}\text{س}_\text{ن} \leqslant \text{ب}_\text{م} \\
\text{س}_1 \text{،} \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_\text{ن} \leqslant \text{صفر}
\end{array}\right\} \quad (٤٠)$$

تسمى مسألة البرمجة الخطية المباشرة أو الاولية . ولكل مسألة برمجة خطية أولية أو مباشرة يمكن صياغة مسألة برمجة خطية مصاحبة لها تسمى بالمسألة الغير مباشرة أو الثنائية على الصورة :

تدنية :

$$\text{ع}_2 = \text{ب}_1\text{ص}_1 + \text{ب}_2\text{ص}_2 + \cdots + \text{ب}_\text{م}\text{ص}_\text{م}$$

مستوفيا القيود التالية :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ا}_{11}\text{ص}_1 + \text{ا}_{12}\text{ص}_2 + \cdots + \text{ا}_{1\text{م}}\text{ص}_\text{م} \leqslant \text{ح}_1 \\
\text{ا}_{21}\text{ص}_1 + \text{ا}_{22}\text{ص}_2 + \cdots + \text{ا}_{2\text{م}}\text{ص}_\text{م} \leqslant \text{ح}_2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\text{ا}_{\text{ن}1}\text{ص}_1 + \text{ا}_{\text{ن}2}\text{ص}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}\text{م}}\text{ص}_\text{م} \leqslant \text{ح}_\text{ن} \\
\text{ص}_1 \text{،} \text{ص}_2 \text{،} \cdots \text{،} \text{ص}_\text{م} \leqslant \text{صفر}
\end{array}\right\} \quad (٤١)$$

ويمكن ترتيب الحدود للمسألتين الأولية والثنائية على الصورة التالية :

	س١	س٢	س٣	. . .	سن		
ص١	ا١١	ا٢١	ا٣١		ان١	⩾ ب١	
ص٢	ا١٢	ا٢٢	ا٣٢		ان٢	⩾ ب٢	(٤٠)
.	.	.	.	. . .	.		
صم	ا١م	ا٢م	ا٣م		انم	⩾ بم	
	⩾	⩾	⩾		⩾		
	ح١	ح٢	ح٣		حن		

(أ) إذا فرضنا أن المسألة الأولية كانت مسألة تحديد الكميات س١ ، س٢ ، ... ، سن : وأن حر ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن هى العائد (هامش الربح) لإنتاج الوحدة من المنتج ر . وأن اور هى متطلبات إنتاج الوحدة من المنتج ر من المورد المتاح و وأن بو ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م هى الموارد المتاحة .

واضح أن وحدات اور فى هذه الحالة هى $\frac{\text{مورد (و)}}{\text{وحدة كمية إنتاج (ر)}}$

وذلك لأن وحدات سر = كمية و وحدات بو = مورد .

كذلك فإن وحدات حر = $\frac{\text{هامش ربح أو عائد (سعر) (ر)}}{\text{وحدة كمية إنتاج (ر)}}$

وبذلك فإن المسألة الأولية هى :

تنظيم :

المسألة الأولية (٤٣)

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\text{الكمية المنتجة}\right)_{\text{ر}} \left(\frac{\text{هامش الربح}}{\text{لوحدة كمية الإنتاج}}\right)_{\text{ر}} = \text{هامش الربح الكلى (سعر)}$$

مستوفيا

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{مورد (و)}}{\text{وحدة كمية الإنتاج (ر)}} \left(\text{الكمية المنتجة}\right)_{\text{ر}} \leqslant \text{مورد (و)}$$

$$\text{و} = ١ ، ٢ ، \cdots ، \text{م}$$

وإذا طبقنا مفهوم ذلك على المسألة الثنائية فإن وحدات $\text{ص}_{\text{و}}$ تكون :

$$\frac{\text{سعر (تكلفة استخدام)}_{\text{و}}}{\text{لوحدة المورد (الطاقة)}_{\text{و}}}$$

وتكون المسألة الثنائية

تدنية :

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \frac{\text{سعر (تكلفة استخدام)}_{\text{و}}}{\text{لوحدة المورد (الطاقة)}_{\text{و}}} \text{ المورد (و)}$$

المسألة الثنائية (٤٤)

مستوفيا

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \frac{\text{مورد (و)}}{\text{وحدة كمية الانتاج (ر)}} \left(\frac{\text{تكلفة استخدام المورد}}{\text{لوحدة المورد}}\right)_{\text{و}} \geqslant \left(\frac{\text{هامش الربح (سعر)}}{\text{وحدة الانتاج}}\right)_{\text{ر}}$$

$$\text{ر} = ١ ، ٢ ، \cdots ، \text{ن}$$

أى أن $ص_و$ هى الأسعار المصاحبة لاستخدام الطاقة $ب_و$ والتى يمكن أن نسميها أسعار الظل فكل برنامج للتشغيل أو الانتاج $س$ يتبعه فى نفس الوقت سعر استخدام للطاقات $ص$ وعند تحديد الانتاج يتحدد فى نفس الوقت أسعار ظل الطاقات . وأمثل برنامج للانتاج $س^{\circ} = (س^{\circ}_١ ، س^{\circ}_٢ ، ... ، س^{\circ}_ن)$ يحدد كميات الانتاج يناظره أفضل مستوى لأسعار الظل ($ص^{\circ}_١ ، ص^{\circ}_٢ ،$ ... $ص^{\circ}_م$) $= ص^{\circ}$.

مثال (٤) :

سوف نعطى مثالا للمسألتين الاولية والثنائية وسوف نستخدم هذا المثال للدلالة على بعض الخواص الهامة للعلاقة بين المسألتين قبل المعالجة الرياضية :

حل المسألة الثنائية للمسألة الأولية :

المسألة الأولية:

$$ع = ٢س_١ + س_٢ + ٥س_٣$$

مستوفيا

$$س_١ + س_٢ + س_٣ \leqslant ١٢$$

$$س_٢ + ٣س_٣ \leqslant ٩$$

المسألة الثنائية:

$$\text{تدنية}: \bar{ع} = ١٢ص_١ + ٩ص_٢$$

مستوفيا

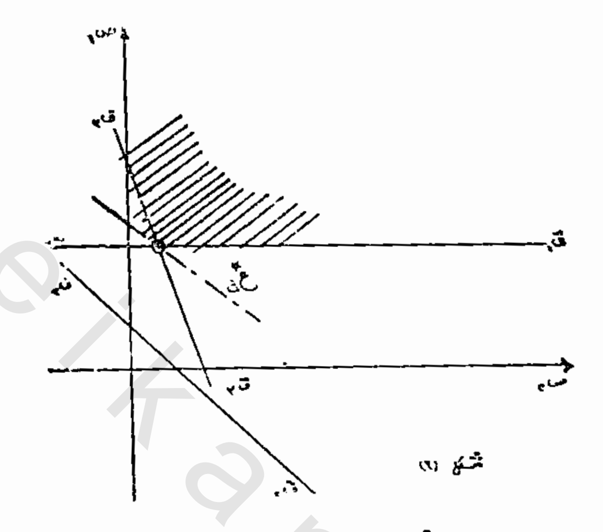
$$ق_١ = ص_١ \geqslant ٢$$

$$ق_٢ = ص_١ + ص_٢ \geqslant ١$$

$$ق_٣ = ص_١ + ٣ص_٢ \geqslant ٥$$

والحل البيانى لهذه المسألة موضح ن الشكل (٣) .

حيث ص$_١$ = ٢ ، ص$_٢$ = ١ ، ع ث = ٣٣



ويتضح من الحل السابق أن ع ث* الناتجة من الحل البيانى فى شكل (٣) تساوى قيمة ع$_١$ للمسألة الأولية (مثال (١)) .

أى أن :

ع$^*_١$ = ع*ث وهى من الملاحظات الواضحة .

إلا أنه بشىء من التدقيق نلاحظ أن فى الجدول الأخير لحل المسألة الأولية جارية. السمبلكس وأسفل عمود المتغيرات العاطلة س$_٤$ ، س$_٥$ فإن قيمة :

ع$_٤$ — حـ$_٤$ = ٢ ، ع$_٥$ — حـ$_٥$ = ١

وهى نفس القيم التى حصلنا عليها لأسعار الظل ص$_١$ ، ص$_٢$ على الترتيب :

ص$_١$ = (ع$_{٢+١}$ — حـ$_{٢+١}$) = ٢

ص$_٢$ = (ع$_{٢+٢}$ — حـ$_{٢+٢}$) = ١

كما نلاحظ أنه بالتعويض بقيم $س_{1}$ ، $س_{2}$ ، $س_{3}$ المثلى وهى :

$س^{*}_{1}$ = ٩ ، $س^{*}_{2}$ = صفر ، $س^{*}_{3}$ = ٥

فى القيود فإنه عندما :

($س_{1}$ + $س_{2}$ + $س_{3}$) − ١٢ = صفر فإن : صفر < $ص^{*}_{1}$ = ٢

وكذلك :

($س_{2}$ + ٢ $س_{3}$) − ٩ = صفر فإن : صفر < $ص_{2}$ = ١

ومعنى ذلك أنه عندما $مجـ_{ر}$ $أو_{ر}$ $س_{ر}$ − $ب_{و}$ = صفر

فإن : $ص_{و}$ > صفر

وعندما $مجـ_{ر}$ $أو_{ر}$ $س_{ر}$ − $ب_{و}$ > صفر فإن : $ص_{و}$ = صفر

لذلك فإن $ص_{و}$ هى أسعار ظل استخدام الموارد المستنفذة .

وبنفس التحليل السابق عندما :

$ص_{1}$ − ٢ = صفر فإن : ٠ < $س_{1}$ = ٩

$ص_{1}$ + $ص_{2}$ − ١ > صفر فإن : $س_{2}$ = صفر

$ص_{1}$ + ٣$ص_{2}$ - ٥ = صفر فإن : ٠ < $س_{3}$ = ٣

أى أن :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ص}_{ر} > \text{صفر لقيم } ر \text{ التى لها } \left(\sum_{و=1}^{م} أ_{ور}\,\text{ص}_{و} - \text{حـ}_{ر} = \text{صفر} \right) \\ \text{ص}_{ر} = \text{صفر لقيم } ر \text{ التى لها } \left(\sum_{و=1}^{م} أ_{ور}\,\text{ص}_{و} - \text{حـ}_{ر} > \text{صفر} \right) \end{array}\right\} \quad (٤٥)$$

(ii) نظريات المسألة الثنائية :

(١) إذا كان {س} حل ممكن للمسألة الأولية ،

{ص} حل ممكن للمسألة الثنائية فإن :

$$\text{حـ س} \geqslant \text{بَ ص} \qquad (٤٦)$$

أو :

$$ع_{١} \geqslant ع_{ث}$$

ولإثبات ذلك :

يلاحظ أن : لأى حل عملى للمسألة (٤٠) يمكن كتابة :

$$(\text{أ س})_{و} \geqslant \text{ب}_{و} \qquad (٤٧)$$

$$و = ١ ، ٢ ، \dots ، ل$$

ولما كانت $\text{ص}_{و} \geqslant \text{صفر}$ ، $و = ١ ، ٢ ، \dots ، ل$ فإن :

$$\text{ص}_{و}\,(\text{أ س})_{و} \geqslant \text{ص}_{و}\,\text{ب}_{و} \qquad (٤٨)$$

وبإجراء عملية جـ بالنسبة للمؤشر (و) فإن :

أو :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ع ص}_{و} (\text{أ س})_{,} \leqslant \text{ص}_{و} \text{ ب}_{و} \\ \\ \text{ص}^{-} \text{أ س} \leqslant \text{ب}^{-} \text{ص} \end{array}\right\} \quad (٤٩)$$

وبنفس الطريقة فإنه لما كانت ص حل عملى للمسألة (٤١) فإن :

$$\text{أ ص} \leqslant \text{حـ}^{-}$$

ولما كانت $\text{س}_{ر} \geqslant$ صفر حل عملى فإن :

$$\text{ص}^{-} \text{أ س} \leqslant \text{حـ س} \quad (٥٠)$$

وبمقارنة (٤٩) ، (٥٠) فإن :

$$\text{ب}^{-} \text{ص} \leqslant \text{حـ س}$$

كذلك فإنه إذا كان : $\text{ب}^{-} \text{ص}^{\circ} = \text{حـ س}^{\circ}$

فإن : [ص°] ، [س°] يكون حلان أمثلان للمسألة الثنائية والأولية على الترتيب وذلك من حيث أننا فرضنا أن :

$\text{ب}^{-} \text{ص} = \text{حـ س}$ ولكن بالتعويض (٤٦) فإنه لأى حل عملى س

$$\text{حـ س} \geqslant \text{ب}^{-} \text{ص}^{\circ} = \text{حـ س}^{*}$$

∴ س° حل أمثل للمسألة الأولية كذلك وبنفس الطريقة لأى حل عملى ص

$\text{ب}^{-} \text{ص}^{\circ} = \text{حـ س}^{\circ} \leqslant \text{ب}^{-} \text{ص}$ وبالتالى فإن ص° حل أمثل أيضاً .

وهو المطلوب .

(ب) لإيجاد العلاقة بين الحل الأمثل للمسألة الأولية والثنائية :

فإنه يلاحظ الحل بالسمبلكس ضرورة التعبير عن المسألة على شكل معادلات وبذلك فإن المسألة الأولية تؤول إلى تعظيم :

$$\left.\begin{array}{ll} ع_{١} = حـ س & \text{مستوفيا} \\ ا س + ى س_{ط} = ب \text{ ، } س \text{ ، } س_{ط} \geqslant \text{صفر} \end{array}\right\} \quad (٥١)$$

حيث س ط المتغيرات العاطلة ، ى مصفوفة الوحدة .

وافترض الآن أن سه حل أساسي أمثل المسألة (٥١) كذلك أفرض أن اه هي المصفوفة الأساسية المصاحبة للحل الأساسي الأمثل وأن حه هي ثمن المتغيرات الأساسية . ونظراً لأن سه مثلى فإن $ع_{ر} - حـ_{ر} \geqslant$ صفر لجميع قيم ر . وبالنسبة للمتجهات $ا_{ر}$ المصفوفة [ا] فإن :

$$\left.\begin{array}{l} حه\ [\ اه\ ]^{-١}\ ا_{ر} \geqslant حـ_{ر} \\ \text{أو :} \\ حه\ [\ اه\ ]^{-١}\ [\ ا\ ] \geqslant حـ \end{array}\right| \quad (٥٢)$$

وبكتابة ص َ = حه [اه]$^{-١}$. فإن حه [اه]$^{-١}$ تكون حلا للمسألة الثنائية (٤١) فإذا اعتبرنا المتغيرات العاطلة في المسألة (٥١) وأوجدنا لها القيم $ع_{ر} - حـ_{ر}$ فإن الحل ص َ = حه [اه]$^{-١}$ يكون حلا ممكنا وذلك لأن $حـ_{ر}$ للمتغيرات العاطلة = صفر وبالتالي فإن :

$$ح_ه\,[أ_ه]^{-1}\,و - صفر \geqslant صفر$$

أو :

$$ح_ه\,[أ_ه]^{-1}\,ى \geqslant صفر$$

ومنها :

$$ح_ه\,[أ_ه]^{-1} \geqslant صفر \qquad (٥٢)$$

ولإتمام البرهان سوف نثبت أن :

$ص^{*} = ح_ه\,[أ_ه]^{-1}$ هى حل أمثل . وذلك بالتعويض :

$$ع^{*}ث = ص^{*}ب = ح_ه\,[أ_ه]^{-1}ب = ح_ه\,س_ه = ع^{*}_{أ}$$
(٥٤)

وهذه النتيجة الهامة تنص على أن الحــــل الأمثل للمسألة الأولية والثنائية متساويان وأن الحل الامثل للمسألة الثنائية يمكن الحصول عليه مباشرة من قيم $ع_ر - ح_ر$ للمتغيرات الماطلة للمسألة الاولية .

وفى حالة استخدام طريقة لسمبلكس المعدلة بأن حل المسألة الثانية يكون فى الصف الاول لجدول الحل الأمثل للمسألة الأولية .

(ح) نظرية الرواكد المتممة : Complementary Slackness

[تنص نظرية الرواكد (العوامل) المتممة على أنه إذا كان $س^{*}$ ، $ص^{*}$ حلين عمليين لكل من المسألة الأولية والثنائية على التوالى فلكى يكون أيضا حلين أمثلين يجب أن يحققا العلاقة الهامة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} ص (ب - ا س^*) = صفر \\ (ص^* ا - حـ) س^* = صفر \end{array}\right\} \quad (٥٥)$$

والواقع أن إثبات النظرية مباشر لأنه لما كانت كل من ص* ، س* حل ممكن فإن كل من س* ، ص* تكون موجبة

وكذلك :

(ب — ا س*) ، (ص* ا — حـ) وبالتالى فإن لأى حل عملى

يمكن تعريف :

أو :

$$\left.\begin{array}{l} ت_١ = ص^* (ب - ا س^*) \geqslant صفر \\ ت_٢ = (ص^* ا - حـ) س^* \geqslant صفر \end{array}\right\} \quad (٥٦)$$

وبالجمع :

$$ت_١ + ت_٢ = ص^* ب - حـ س^*$$

ولما كان طبقا للنظرية الثنائية ص* ب = حـ س* = ع$_م$ فإن :

$$ت_١ + ت_٢ = صفر \quad (٥٧)$$

ولما كان كلا من : ت$_١$ ، ت$_٢$ موجب أو يساوى صفر فإنه من الضرورى لصحة (٥٧) أن يكون :

ت$_١$ = صفر ، ت$_٢$ = صفر وهو المطلوب .

وبإعادة كتابة حدود المعادلات (٥٥) يمكن أن نصل إلى النتيجة الهامة التي حصلنا عليها فيما سبق في المعادلات (٤٥) .

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ص}^*_{\text{و}}\left(\text{ب}_{\text{و}} - \text{أ}_{\text{و}}\,\text{س}^*\right) = \text{صفر} & \text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م} \\ \left(\text{ص}^*\text{أ}_{\text{ر}} - \text{ح}_{\text{ر}}\right)\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{صفر} & \text{ر} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{ن} \end{array}\right\} \quad (٥٨)$$

ومعنى ذلك أنه عندما

$$\left.\begin{array}{lll} \text{ب}_{\text{و}} - \text{أ}_{\text{و}}\text{س}^* = \text{صفر} & \text{فإن} : & \text{ص}^*_{\text{و}} \geqslant \text{صفر} \\ \text{ب}_{\text{و}} - \text{أ}_{\text{و}}\text{س}^* > \text{صفر} & \text{فإن} : & \text{ص}^*_{\text{و}} = \text{صفر} \\ \text{ص}^*\text{أ}_{\text{ر}} - \text{ح}_{\text{ر}} = \text{صفر} & \text{فإن} : & \text{س}^*_{\text{ر}} \geqslant \text{صفر} \\ \text{ص}^*\text{أ}_{\text{ر}} - \text{ح}_{\text{ر}} > \text{صفر} & \text{فإن} : & \text{س}^*_{\text{ر}} = \text{صفر} \end{array}\right| \quad (٥٩)$$

وهو ما يعرف بنظرية الرواكد المتممة .

(iii) البرمجة البارامترية

بدراسة أكثر تفصيلا للمسألة الأولية المعبر عنها في النموذج الرياضي (د) وباعتبار هذه المسألة مسألة تحديد كميات إنتاج فإنه على متخذ القرار أن يأخذ في اعتباره عند الحل الأمكانيات التالية .

١ — تغيير في قيمة المعاملات $\text{أ}_{\text{وم}}$ ومعنى هذا تغيير في الطرق الإنتاجية (تطوير تكنولوجي) .

٢ — تغير في قيم $\text{ح}_{\text{ر}}$ يرتبط إما في أسعار السوق أو تحسن في الإنتاجية يرتبط بكفاءة في الأداء أو تطوير في الإنتاج .

٣ — تغير فى قيم $\text{ب}_{و}$ ويعنى ذلك تغير فى الطاقات أو الموارد المتاحة (إجراء توسعات) أو إضافة موارد .

ولنفرض أن متخذ القرار قد أوجد الحل الأمثل للظروف السائدة المعبر عنها بالمعاملات [$\text{ا}_{ور}$] $\text{ب}_{و}$ ، $\text{جـ}_{ر}$ لكنه يهتم بمعرفة إلى أى حد يتأثر هذا الحل بحدوث تغيرات فى المعاملات سالفة الذكر . ويعرف ذلك باختبار الحساسية Sensitivity Analysis كما يعرف باسم البرمجة البارامترية نسبة إلى إعتبار المعاملات (الثوابت) فى المسألة بارامترات (متغيرات) يمكن إفتراض تغيرها فى مديات محددة .

(٭) تغير المعاملات $\text{ا}_{ور}$ قليلا ما نقابله فى المسائل العادية ويحتاج كل مره إلى إعادة الحل بالمعاملات الجديده .

(٭٭) أما التغير فى الأسعار $\text{جـ}_{ر}$ فيمكننا دراسة تأثير تغييره على الحل الأمثل $\text{س}^{\circ} = (\text{س}^{\circ}_{١} ، \text{س}^{\circ}_{٢} ، \dots ، \text{س}^{\circ}_{ن})$ ذلك أنه إذا كان الحل الأمثل السابق مناظراً لقيم $\text{جـ} = (\text{جـ}_{١} ، \text{جـ}_{٢} ، \dots \text{جـ}_{ن})$ فإنه بتغير جـ إلى $\text{جـ} + \text{ء جـ} = \text{جـ}_{١} + \text{ء جـ}_{١} ، \text{جـ}_{٢} + \text{ء جـ}_{٢} ، \dots ، \text{جـ}_{ن} + \text{ء جـ}_{ن}$) فإنه بتعويض هذه القيم فى مقيمات الحل الأمثل $\text{ع}_{ر} - \text{ح}_{ر}$.

$$\text{ع}_{ر} - \text{ح}_{ر} = \left\{ \sum_{\text{و}=١}^{\text{م}} (\text{ح}_{و} + \text{ء ح}_{و})\ \text{ص}^{\circ}_{\text{ور}} \right\} - (\text{ح}_{ر} + \text{ء ح}_{ر}) \qquad (٦٠)$$

فإذا كانت $\text{ع}_{ر} - \text{ح}_{ر}$ محتفظة بإشاراتها أو قيمتها تساوى الصفر يكان الحل مازال أمثل اما إذا تغيرت الإشارة $\text{ر} = ١ ، ٢ ، \dots ، \text{ن}$ فالحل غير أمثل بالقيم الجديدة للاسعار $\text{ح} + \text{ء ح}$

(***) ومن المسائل التي يمكن أن تواجهها الإدارة دراسة كيف يؤثر التغير في بعض الموارد (سياسات التوسع) على هيكل الإنتاج وفي أي حدود يحدث ذلك .

وفي هذه الحالة يمكن الرجوع إلى المسألة الثنائية لأن الطاقات أو الإمكانيات تظهر في دالة الهدف مباشرة وبذلك يمكننا إختبار ما إذا كان الحل الأمثل :

$ص^* = \{ ص_1^* ، ص_2^* ، \ldots ، ص_م^* \}$ للامكانيات المعطاة

$ب = (ب_1 ، ب_2 ، \ldots ، ب_م)$ يتأثر بتغير ب إلى ب + ء ب

حيث :

$$ب + ء ب = (ب_1 + ء ب_1 ، ب_2 + ء ب_2 ، \ldots ، ب_م + ء ب_م)$$

وذلك بدراسة المتجهات :

$$ف_و^* - ب_و = \left\{ \sum_{ر=1}^{ن} ف_{و ر} (ب_ر + ء ب_ر) \right\}$$

$$- (ب_و + ء ب_و) \qquad (٦١)$$

ومعرفة في أي مدى لقيم ء ب و تتغير إشاراتها .

(٣—٧) طريقة السمبلكس الثنائية : Dual Simplex Method

فى منا قشتنا لنظرية الثنائية فى مسألة البرمجة الخطية لاحظنا أن لكل برنامج للمسألة الاولية منه أيضاً برنامج لمسألة ثنائية . وإذا استرجعنا خطـــوات السمبلكس بإختصار شديد لوجدناها تتلخص فيما يلى :

١ — نختار مصفوفة أساسية م × م مكونة من عدد م من الأعمدة نختارها من بين الأعمدة الكلية م + ن للمعاملات بحيث تكون قيم $ب_{و}$ للحل الإبتدائى موجبة .

٢ — نختار عامود $ا_{ب}$ له قيمة $ع_{ب} - ح_{ب} < صفر$ ليدخل الأساسية ونختار المتجه الذى يترك الأساسية $ا_{ر}$ من العلاقة :

$$\theta_{ر} = أقل_{و} \left\{ \frac{ب_{و}}{ا_{وب}} \right\} = \frac{ب_{ر}}{ا_{رب}}$$

وذلك لتكون قيم $ب_{و}$ فى الحل الجديد غير سالبة (ونظراً لاننا نبــدأ بمعاملات $ا_{ور} = ص_{ور}$ فسوف نستخدم $ا_{ور}$ للدلالة على $ص_{ور}$ على أن يدرك القارىء ذلك) .

٣ — تجرى عملية تغيير المعاملات المصفوفة بعد استبدال $ا_{ر}$ بـ $ا_{ك}$ ويسمى $ا_{رك}$ المفصل وتحسب قيم $ع_{ر} - ح_{ر}$ الجديدة . فإذا كانت $ع_{ر} - ح_{ر} \geq صفر$ يكون الحل أمثل . فإذا لم يتوفر ذلك تكرر العمل إبتداء من الخطوة (٢) .

لاحظ أن : $ع_{ر} - ح_{ر} \geq صفر$

تعنى أن : $ح_{ه} ا_{ر} - ح_{ر} \geq صفر$ لجميع قيم $ر$

أى : $حـ ه [ا] - حـ \geqslant$ صفر

أى : $حـ ه [ا] \geqslant حـ$

ومن ثم فإن : حـ ه هى فى الواقع حل ممكن للمسألة الثنائية

والملاحظة السابقة رغم بساطتها هى أساس فكرة السمبلكس الثنائية والتى تتلخص فيما يلى :

١ — إبدأ جدول السمبلكس بقيم $ع_ر - جـ_ر \geqslant$ صفر

٢ — إذا كانت $ب_و$ فى الحل غير سالبة أى $ب_و \geqslant$ صفر لجميع قيم و فالمسألة محلولة .

٣ — إذا كانت بعض قيم $ب_و$ فى الحل سالبة . إختار أحد قيم $ب_و$ السابقة ولنفترض أنها $ب_ر <$ صفر فيكون المتغير $س_ر$ هو الذى يترك الأساسية (يترك الحل) .

٤ — لإيجاد المتغير $س_ك$ الذى يدخل الحل أوجد قيمة :

$$\text{أكبر} \left(\frac{ع_ر - جـ_ر}{ا_{ر ر}} \right) = \frac{ع_ك - جـ_ك}{ا_{ر ك}} \quad , \quad ا_{ر ر} < \text{صفر} \quad (٦٢)$$

والخطوة السابقة تضمن بإستمرار $ع_ر - جـ_ر \geqslant$ صفر حتى تضمن إمكانية الحل الثنائى .

٥ — يسمى $ا_{ر ك}$ بالمفصل وتجرى عملية تغيير المعاملات

ويلاحظ أن القيم السالبة فقط ا ر ر هى التى يمكن أن تكون منفصلة .

٦ — يكرر الحل إبتداء من الخطوة (٢) حتى نحصل على جميع قيم ب و ≥ صفر .

وتستخدم طريقة السمبلكس الثنائية نفس جدول السمبلكس وهى تتابع أسلوب عكسى فهى تحدد أولا المتغير الذى يترك الأساسية ثم بعد ذلك المتغير الذى يدخل الأساسية .

(٨—٣) طريقة الأعمدة لبيل Beal's Column Algorithm

طريقة السمبلكس الأولية تبدأ بإيجاد حل ممكن (عملى) ابتدائى وطريقة السمبلكس الثنائية تحافظ دائماً على حل ثنائى ممكن .

وفى مسألة السمبلكس الأولية نحدد أولا المتغير (المتجه) الذى يدخل الأساسية وفى مسألة السمبلكس الثنائية نحدد أولا المتغير الذى يترك الأساسية . وفى كلا الحالتين يتم تغيير الجدول بعد تحديد المنفصل مستخدمين طريقة حذف الصف لأننا نفترض فى كلا الطريقتين م < ن . فإذا كانت م > ن بمعنى وجود متباينات أكثر من المتغيرات فمن المفضل استخدام طريقة حذف العمود وعند تغيير الجدول .

وفى طريقة حذف الصف تكون قيم المعادلات الجديدة :

ا ر ك = ١ ، ا و ك = صفر ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م و ≠ ر

بينما فى طريقة حذف العمود تكون قيم المعادلات الجديدة :

ا ص ك = ١ ، ا ص ر = صفر ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

(٣—٩) البرمجة الخطية الفاصلة (الحل الصريح لمسألة البرمجة الخطية)(*)

Inte val Lin ar Programming

يمكن فى بعض التطبيقات ذات الصياغة الخاصة أن نحصل على حل صريح لمسألة البرمجة الخطية دون اللجوء إلى طريقة السمبلكس وقد وجدنا من باب الشمول ضرورة التعرض لهذا النوع من المسائل الذى يعرف باسم البرمجة الخطية الفاصلة . والذى يكون على الصورة :

تعظيم :

ع = جـ١ س١ + جـ٢ س٢ + ... + جـن سن

مستوفيا

د١ ≥ ا١١ س١ + ا٢١ س٢ + ... + ا١ن سن ≥ ب١

د٢ ≥ ا١١ س١ + ا٢٢ س٢ + ... + ا٢ن سن ≥ ب٢

. . . .

دم ≥ ام١ س١ + ام٢ س٢ + ... + امن سن ≥ بم

س١ ، س٢ ، ... ، سن ≥ صفر

(٦٢)

حيث يلاحظ فى النموذج (٦٣) ظهور القيود بحد أقصى وحد أدنى وبذلك يسمح للتغير فى قيمة القيد فى الفترة الفاصلة (المدى) بين الحد الأقصى والحد الأدنى .

ويمكن التعبير عن النموذج (٦٢) بجبر المصفوفة على الصورة :

ع = جـَ س

مستوفيا

ب < [ا] س < د

(٦٤)

(*) Ben Is ael, A Charnes, A. P Hanteos, P.D Bobert « on Exp'cit Sulation of a Special Class of Linear Economic Models » Jr. Orea V 18 Nô 3 PP 467 470

[إذا كانت المصفوفة [ا] مصفوفة مربعة ($م = ن$) بحيث يكون لها مقلوب $[ا]^{-1}$ فإنه يمكن إيجاد حل صريح لمسألة البرمجة الخطية السابقة دون استخدام طريقة السمبلكس ويعطى الحل من العلاقة :]

$$س^* = ا^{-1} ق$$

حيث يكون متجه القيود {ق} من العناصر $ق_ر$ التى تعطى بالقيم التالية :

$$\left.\begin{array}{ll} ق_ر = ب_ر & \text{إذا كانت : } جـ[ا^{-1}] > \text{صفر} \\ ق_ر = ى_ر & \text{إذا كانت : } جـ[ا^{-1}] > \text{صفر} \\ ق_ر = \lambda ى_ر + (١ - \lambda) ب_ر & \\ \text{إذا كانت : } جـ[ا^{-1}] = \text{صفر} & \\ \text{حيث} & ١ \geqslant \lambda \geqslant \text{صفر} \end{array}\right\} \quad (٦٦)$$

لإثبات أن الحل المعبر عنه فى مجموعة المعادلات (٦٥) ، (٦٦) هو الحل الأمثل المطلوب لمسألة البرمجة الخطية الفاصلة (٦٢) نعوض عن :]

ق = ا س فى (٦٤) حيث نحصل على المسألة التالية :

$$\text{عظم ع} = جـ [ا]^{-1} ق$$

مستوفيا

$$ب \leqslant ق \leqslant ى$$

فإذا كانت جـ $[ا]^{-1}$ كمية موجبة فى دالة الهدف فإنه لتعظيم ع نختار $ق_ر$ أكبر ما يمكن أى $ق_ر = ب_ر$. بينما إذا كانت جـ $[ا]^{-1}_ر$ سالبة فعليها

إختيار $ق^{\cdot}_{ر} = ى^{\cdot}_{ر}$ حتى لا تقل ع . إما إذا كانت $\bar{ج}\,[أ]^{-1}_{\cdot ر} =$ صفر فإن اى كمية محصورة بين $ب^{\cdot}_{ر}$ ، $ى^{\cdot}_{ر}$ أى : $\lambda\, ى^{\cdot}_{ر} + (1 - \lambda)\, ب^{\cdot}_{ر}$ ، $1 \geqslant \lambda \geqslant$ صفر يمكن إختيارها حيث لا يؤثر ذلك على دالة الهدف .

وهو المطلوب ...

ومن الواضح أنه إذا تمكنا من صياغة مسألة البرمجة الخطية بالصورة الخاصة السابقة فإن حلها يكون مباشراً .

(٣—١٠) بعض التطبيقات العيارية للبرمجة الخطية

(٣ — ١٠ — ١) تخطيط الإنتاج :

من التطبيقات الرئيسية للبرمجة الخطية مسائل تخطيط الانتاج التي يمكن صياغتها بعده صور طبقاً لطبيعة المسألة . افترض أن النشاط الانتاجي يتكون من عدد م من العمليات الانتاجية وأنه على المخطط تحديد تشكيله المنتجات المحددة بكميات الانتاج ($س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$) . وأنه متوفر لديه الطاقات المتاحة للعمليات الانتاجية (ماكينه . ساعه) حيث $ب_و$ الطاقه المتاحه للعملية الانتاجية $و$ ، و = ١ ، ٢ ، . . . ، م . وإذا كانت $ا_{ور}$ متطلبات التشغيل اللازمه لانتاج المنتج $ر$ بالعملية الانتاجية و (ماكينه . ساعه$_{(و)}$/وحده المنتج$_{(ر)}$) ، وإذا كان $ح_ر$ هامش الربح للمنتج $س_ر$ ، فإنه يمكن صياغة مسألة التخطيط في هذه الحالة على الصورة :

عظم :

$$
\left.
\begin{array}{l}
ع = ح_١ س_١ + ح_٢ س_٢ + \cdots + ح_ن س_ن \\
\text{مستوفيا} \\
ا_{١١} س_١ + ا_{٢١} س_٢ + \cdots + ا_{١ن} س_ن \leqslant ب_١ \\
ا_{١٢} س_١ + ا_{٢٢} س_٢ + \cdots + ا_{٢ن} س_ن \leqslant ب_٢ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
ا_{م١} س_١ + ا_{م٢} س_٢ + \cdots + ا_{من} س_ن \leqslant ب_م \\
س_١ ، س_٢ ، \cdots ، س_ن \geqslant \text{صفر}
\end{array}
\right\} \quad (٦٧)
$$

وهى مسأله برمجه خطيه تقليديه . وكمثال على هذا النوع من مسائل التخطيط اعتبر الجدول (٢) التالى الذى يبين ساعات التشغيل اللازمه لمجموعه من المنتجات فى أقسام إنتاجيه مختلفة فى أحد الورش التعاقديه . حيث قدرت الطاقه الانتاجيه بكل قسم من هذه الأقسام بعدد الماكينات مضروباً فى ساعات التشغيل المتاحه شهرياً لكل ماكينه (٢٠٠) ساعه .

وبالاضافه الى قيود الطاقات المحدده فى جدول (٢) فإنه قد حددت إداره المبيعات ضروره إنتاج المنتج الثالث بحد أدنى ١٠٠ قطعه شهرياً .

هامش الربح (جنيه)		ص١ = ١٠٠	ص٢ = ١٥٠	ص٣ = ١٢٠	ص٤ = ١٢٠	[illegible]	ص٦ = ٥٠	ص٧ = ٤٠	الطاقات المتاحه شهرياً
المنتجات		(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	
أقسام الورشه الانتاجيه	قسم الخراطه	١	١ر٥	٣	٢	٢	٠ر٥	٨	١٦٠٠
	قسم التثقيب	٠ر٥	—	١	١	—	١ر٥	١	١٤٠٠
	قسم الكشط	٢	—	١	١	—	٠ر٥	—	٦٠٠
	قسم التفريز	—	١	—	١	—	٦	—	٤٠٠
	قسم التجميع	—	٢	١	—	٢	—	—	٤٠٠

جدول (٢) بيانات التخطيط

وباستخدام هذه البيانات يكون نموذج التخطيط هو :

عظم :

ع = ١٠س١ + ١٥س٢ + ١٢س٣ + ١٢س٤ + ٢٠س٥ + ٢٥س٦ + ٢٠س٧

مستوفيا

س١ + ١٫٥س٢ + ٢س٣ + ٢س٤ + ٣س٥ + ٫٥س٦ + ٨س٧ ⩽ ١٦٠٠

٫٥س١ + س٣ + س٤ + ٫٥س٦ + س٧ ⩽ ١٤٠٠

٢س١ + ٢س٢ + س٣ + س٤ + ٫٥س٦ ⩽ ٦٠٠

س٢ + س٤ + ٦س٦ ⩽ ٤٠٠

٢س١ + س٣ + ٣س٥ ⩽ ٤٠٠

س٣ ⩾ ١٠٠

س١ ، س٢ ، ... ، س٧ ⩾ صفر

والحل باستخدام طريقة السمبلكس مباشر ، والحل الامثل في حالتنا يعطي بالقيم :

س١ = ٢٢٣٫٤ ، س٢ = صفر ، س٣ = ١٠٠ ، س٤ = صفر ،
س٥ = ١٠٠ س٦ = ٦٦٫٧ ، س٧ = ٥٣٫٧ وتعطى ع المثلى بـ :

ع° = ٢٢٣٫٤ × ١٠ + ١٠٠ × ١٢ + ١٠٠ × ٢٠ + ٦٦٫٧ ×
٢٥ + ٥٣٫٧ × ٢٠ = ٦٢٦٥

(٥٥) في نفس مجال التخطيط يمكن أن تكون المسألة هي تحديد كيفية استغلال الطاقة الانتاجية خلال حقبة التخطيط .

افترض أنه معلوم لدينا الكميات المطالب بها للبيع لأحدى السلع خلال الفترات ن المقارنة بالكميات ($ك_{1}$ ، $ك_{2}$ ، ... ، $ك_{ن}$) حيث $ك_{و}$ هى الكمية المقدر بيعها فى الفترة (و) ، و = ١ ، ٢ ، ... ، ن .

الطاقة الإنتاجية المتاحة خلال هذه الفترات هى ($ط_{1}$ ، $ط_{2}$ ، ... ، $ط_{ن}$) وفى حالة ثبات الطاقة الإنتاجية خلال فترة التخطيط يمكن أفتراض أن $ط_{1} = ط_{2} = \cdots = ط_{ن} = ط$. ولكن على وجه العموم يمكن أفتراض تغير الطاقة الإنتاجية خلال حقبة التخطيط .

فى أى فترة من فترات الإنتاج ر يمكن إنتاج كمية من الإنتاج بحد أقصى $ط_{ر}$ وهذه الكمية يمكن أن تستخدم فى الوفاء بإحتياجات الفترة الحالية من المبيعات أو فترة قادمة و حيث يمكن تخزين المنتج للبيع فى فترات قادمة . ونفرض أن $س_{ور}$ هى الكمية المنتجة فى الفترة ر والمباعة فى الفترة و . فإن :

$$\sum_{و=ر}^{و=ن} س_{ور} \leq ط_{ر} \qquad ر = 1 ، \ldots ، ن$$

والقيد السابق ينص ببساطة على أن مجموع الكميات المنتجة فى أى فترة ر والمستخدمة فى الفترة و $\geq$ ر يجب ألا تتعدى الطاقة الإنتاجية المتاحة $ط_{ر}$.

وبالإضافة إلى القيد السابق فإنه لدينا قيود الوفاء بالمبيعات والتى يمكن أن نعبر عنها بالقيد :

$$\sum_{ر=1}^{ر=ن} س_{ور} = ك_{و} \qquad و = 1 ، \ldots ، ن$$

حيث ينص هذا القيد على أن مجموع الكميات المخصصة للبيع فى الفترة و والمنتجة فى الفترات $ر \leqslant$ و يجب أن تساوى الكمية المطلوبة للبيع خلال هذه الفترة (و) .

وبالنسبة لدالة الهدف فإذا أخذنا معيار التكلفة فإنه يمكن أن نميز بين نوعين من التكلفة تكلفة الإنتاج فى أى فترة ر وهى $جـ_ر$ وتكلفة التخزين والتى تتناسب مع فترة التخزين للكمية $س_{ور}$ والتى هى الفترة (و — ر) ولذلك فإنه يوجد لدينا لكل كمية $س_{ور}$ تكلفة مصاحبة هى $جـ_ر + ص (و — ر)$ حيث ص تكلفة تخزين الوحدة/فترة .

وبذلك تكون التكلفة الكلية للنظام هى :

$$ع = \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{و=ر}^{و=ن} س_{ور} [جـ_ر + ص (و — ر)]$$

وتكون مسألة البرمجة الخطية هى :

$$(٦٨) \begin{cases} \text{تدنية .} \\ ع = \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{و=ر}^{و=ن} س_{ور} [جـ_ر + ص (و — ر)] \\ \text{مستوفيا} \\ \sum_{ر=1}^{ن} س_{ور} = ك_و \\ \sum_{و=ر}^{و=ن} س_{ور} \leqslant ط_ر \\ س_{ور} \geqslant صفر \quad و ، ر = ١ ، ٠٠٠ ، ن \end{cases}$$

يمكن أيضاً افتراض فى الحالة الأكثر شمولاً إمكانية التشغيل الإضافى بتكلفة $\text{ب}_{\text{ر}}$ فى الفترة ر وبطاقة قصوى $\text{ق}_{\text{ر}}$. وأن الكميات المنتجة بالتشغيل الإضافى فى الفترة ر المستخدمة للوفاء باحتياجات البيع فى الفترة و هى $\text{ص}_{\text{و ر}}$. وأنه فى حالة الضرورة يمكن التعاقد مع موردين لتحديد كميات إضافية $\text{ع}_{\text{و ر}}$ بتكلفة $\text{أ}_{\text{ر}}$ وحد أقصى $\text{ف}_{\text{ر}}$. ويلاحظ باستمرار أن :

$$\text{ج}_{\text{ر}} < \text{ب}_{\text{ر}} < \text{أ}_{\text{ر}}$$

وبذلك تصبح المسألة :

تدنية :

$$\text{ع} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \Big[\text{س}_{\text{و ر}} \left[\text{ج}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر}) \right] + \text{ص}_{\text{و ر}} \left[\text{ب}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر}) \right] + \text{ع}_{\text{و ر}} \left[\text{أ}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر}) \right] \Big]$$

مستوفاة

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و ر}} + \text{ص}_{\text{و ر}} + \text{ف}_{\text{و ر}} = \text{ك}_{\text{و}} \qquad (٦٩)$$

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و ر}} \leq \text{ط}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{و ر}} \leq \text{ق}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{و ر}} \leq \text{ف}_{\text{ر}}$$

(٠٠٠) ومن مسائل التخطيط الدورية أيضاً مسألة تهذيب الإنتاج Production Smoothing وفى هذا النوع من المسائل يفترض أن تغير الطاقة الإنتاجية فى الفترة و + ١ عن الفترة (و) يكون مصاحبا بتكلفة سواء إذا كان زيادة فى الطاقة الإنتاجية حيث يتبع ذلك (خاصة الورش التعاقدية) تعيينات جديدة أو استثمار معدات . أو إذا كان نقص حيث يتبع ذلك الاستغناء عن عمالة أو طاقات عاطلة . وفى هذه الحالة يكون الوصول إلى هيكل إنتاجى مستقر طول فترة التخطيط من أهداف التخطيط :

إذا فرضنا أن عندما ($ط_{ر+1}$ — $ط_{ر}$) > صفر تكون التكلفة $هـ_{ر}$

وأنه عندما $ط_{ر}$ — $ط_{ر+1}$ > صفر

تكون التكلفة $ى_{ر}$. فإنه يمكن تعريف مجموعة القيود التالية :

زيادة الطاقة الانتاجية ≡ $ط_{ر+1}$ — $ط_{ر}$ = $ص_{ر}$ أو :

$ط_{ر+1}$ — $ط_{ر}$ — $ص_{ر}$ = صفر

تخفيض الطاقة الانتاجية ≡ $ط_{ر}$ — $ط_{ر+1}$ = $ع_{ر}$ أو :

$ط_{ر}$ — $ط_{ر+1}$ — $ع_{ر}$ = صفر

وتكون مسألة التخطيط اللازمة لتحديد $س و_{ر}$ بفرض أن الطاقة القصوى المحددة للتشغيل هى $\bar{ط}$ هى :

تدنية :

$$ع = \sum_{ر=١}^{ن} \sum_{و=ر}^{ن} \left[س_{ور} \left(حـ_{ر} + م(و - ر) \right) \right] + \sum_{ر}^{ن} هـ_{ر} ص_{ر} + ى_{ر} ع_{ر}$$

مستوفيا

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{ر=١}^{ن} س_{ور} = ك_{و} \\ \sum_{و=ر}^{ن} س_{ور} - ط_{ر} \leq صفر \\ ط_{ر} + ١ - ط_{ر} - ص_{ر} = صفر \\ ط_{ر} - ط_{ر} + ١ - ع_{ر} = صفر \\ ط_{ر} \leq \bar{ط} \\ س_{ور} ، ص_{ر} ، ع_{ر} ، ط_{ر} \geq صفر \end{array}\right\} \quad (٧٠)$$

(٢—١—٢) مسألة المزج : Blending Problem

يستخدم هذا التطبيق بكثرة فى الصناعات الكيماويه . وقد بدأ تطبيقه أولا فى الصناعات البتروليه . لذلك من المفيد دراسة مزج المواد البترولية . التى يمكن التعبير عنها كما يلى :

يوجد لدينا مجموعة من المواد البتروليه عددها ن ، يمكن مزجها معاً

للحصول على عدد من المكونات أو المركبات البترولية عددها $ص$. والكميات المتاحة من المواد لاجراء عملية المزج معلومة ويرمز لها بالرمز $ك_{ر}$ الكمية المتاحة من المادة $ر$ [حيث $ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن$]. كذلك فإن الكمية المطلوبة $ط_{و}$ من المركب البترولى أو الخليط ($و$) معلومة [$و = ١ ، ... ، ص$] إذا كانت $س_{ور}$ هى الكمية المستخدمة من المادة البترولية $ر$ لإنتاج الخليط البترولى ($و$) فإنه يوجد لدينا العلاقات الطبيعية الآتية :

(قيود الإمكانات)
$$\sum_{و=1}^{و=ص} س_{ور} \leq ك_{ر}$$

(قيود الطلب)
$$\sum_{ر=1}^{ر=ن} س_{ور} \geq ط_{و}$$

وبالإضافة إلى العلاقات السابقة فإنه يوجد لدينا قيود فنية متعلقة بمواصفات الخليط البترولى : حيث يوجد لكل مركب بترولى $و$ مجموعة من المواصفات الفنية المصاحبة $م_{و}$ يجب الوفاء بها .

$$م_{و} = ١ ، ... ، ل_{و}$$

وبفرض ثبات العلاقة بين العناصر والصفات فإنه يمكن إيجاد الثوابت $ا_{رمو}$ التى تحدد نسبة إحتواء الوحدة المعيارية للمادة البترولية $ر$ من المواصفة الفنية المطلوب $م_{و}$. وبالتالى يمكن إضافة القيود الفنية التالية :

$$\sum_{ر=1}^{ن} ا_{رمو} \left(\frac{س_{ور}}{\sum س_{ور}} \right) \geq ق_{امو} \qquad (٧١)$$

حيث ف م و النسبة المطلوبة فى المركب و للمواصفة الفنية المحددة م و

$\frac{مـ س و ر}{س و ر}$ نسبة الخلط المادة (ر) فى المركب (و) محسوبة كنسبة من الكمية

المستخدمة س و ر إلى مجموع الكميات الداخلة فى الخليط $\sum_{ر=1}^{ن}$ س و ر . ويمكن

إعادة ترتيب الحدود للقيد السابق على الصورة المعتاده للصياغة فى البرمجة الخطية

على الصورة :

$$\sum_{ر=1}^{ن} (أ ر م و - ف م و) س و ر \geqslant صفر \qquad (٧٢)$$

و النسبة لدالة الهدف فإذا أعتبرنا هامش الربح كهدف للتخطيط وأن جـ و

هامش الربح للمركب و فإن :

$$ع = \sum_{و=1}^{و=م} جـ و [\sum_{ر=1}^{ر=ن} س و ر] \qquad (٧٣)$$

وتكون مسألة الخلط فى هذه الحالة هى :

أوجد قيم : $س_{ور} \geqslant$ صفر التى تجعل :

$$ع = \sum_{و=1}^{و=م} جـ_و \left[\sum_{ر=1}^{ر=ن} س_{ور} \right] \text{ أكبر ما يمكن}$$

مستوفيا

$$\sum_{و=1}^{و=م} س_{ور} \leqslant ك_ر$$

$$\sum_{ر=1}^{ر=ن} س_{ور} \geqslant ط_و \qquad (٧٤)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} (أ_{رهو} - ف_{هو}) س_{ور} \geqslant صفر$$

ولتوضيح الصياغة السابقة سوف نعتبر مثالا مبسطاً لثلاثة من المواد البترولية كمياتها المتاحة $ك_1$ ، $ك_2$ ، $ك_3$ هى {٤٠٠ ، ٤٥٠ ، ٣٠٠} والتى تستخدم فى إنتاج أربعة أنواع من الوقود البترولى بعمليات الخلط وان الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة هى $ط_1$ ، $ط_2$ ، $ط_3$ ، $ط_4$ {٢٥٠ ، ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ١٥٠} .

وسوف نفترض أن المواصفات الفنية الموضوعة لكل (وقود) بترولى هى الرقم الاوكتينى وضغط البخار أى أن $م_1$ = ١ ، ٢ لكل قيم و وتبين مصفوفة التالية المعاملات أو الثوابت الفنية للخلط :

[ا ر م و] ن

ص و	١	٢
١	١١٠	١٥
٢	٩٥	٨
٣	٨٠	١٠

كذلك تعبر المصفوفة التالية عن المواصفات الفنية الموضوعة فـ م و

[فـ م و] = ص و

و	١	٢	٣	٤
١	١٠٧	٨٥	٩٠	٨٥
٢	١٢	٧	١٠	٩

كذلك فإن هامش الربح يعطى بالمتجه التالى :

ج و = { ٧ ٥ ٦ ٦ }

وبذلك تكون المسألة موضع الدراسة هى :

المطلوب تعظيم :

$$ح = ٧(س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣}) + ٥(س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٣})$$
$$+ ٦(س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣}) + ٦(س_{٤١} + س_{٤٢} + س_{٤٣})$$

مستوفيا

$$س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} + س_{٤١} \leq ٣٠٠$$
$$س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} + س_{٤٢} \leq ٤٥٠$$
$$س_{١٣} + س_{٢٣} + س_{٣٣} + س_{٤٣} \leq ٣٠٠$$
$$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} \geq ٢٥٠$$
$$س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٣} \geq ١٥٠$$
$$س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} \geq ٢٥٠$$
$$س_{٤١} + س_{٤٢} + س_{٤٣} \geq ١٥٠$$
$$(١١٠ - ١٠٧)س_{١١} + (٩٥ - ١٠٧)س_{١٢} + (٨٠ - ١٠٧)س_{١٣} \leq صفر$$
$$(١٥ - ١٣)س_{١١} + (٨ - ١٣)س_{١٢} + (١٠ - ١٣)س_{١٣} \leq صفر$$
$$(١١٠ - ٨٥)س_{٢١} + (٩٥ - ٨٥)س_{٢٢} + (٨٠ - ٨٥)س_{٢٣} \leq صفر$$
$$(١٥ - ٧)س_{٢١} + (٨ - ٧)س_{٢٢} + (١٠ - ٧)س_{٢٣} \leq صفر$$
$$(١١٠ - ٩٠)س_{٣١} + (٩٥ - ٩٠)س_{٣٢} + (٨٠ - ٩٠)س_{٣٣} \leq صفر$$
$$(١٥ - ١٠)س_{٣١} + (٨ - ١٠)س_{٣٢} + (١٠ - ١٠)س_{٣٣} \leq صفر$$
$$(١١٠ - ٨٥)س_{٤١} + (٩٥ - ٨٥)س_{٤٢} + (٨٠ - ٨٥)س_{٤٣} \leq صفر$$
$$(١٥ - ٩)س_{٤١} + (٨ - ٩)س_{٤٢} + (١٠ - ٩)س_{٤٣} \leq صفر$$

$$س_{و ر} \geq صفر \quad و = ١، ٢، ٣، ٤ \quad ، \quad ر = ١، ٢، ٣$$

كذلك فمن التطبيقات الهامة فى مجال تطبيق هذا النوع من النماذج هو عمليات السباكة وسوف نعرض هنا لمثال يستخدم بكثرة فى مجال هندسة الإنتاج يتعلق بعملية سباكة الحديد الزهر فى أفران الصهر المعروفة بإسم الكيوبلا (فرن الدست) حيث يستخدم ثلاثة أنواع من الخامات كمدخلات هى زهر التمساح وزهر خرده وصلب خردة ويبين الجدول (٣) التالى النسبة الكيمائية للمكونات كل مدخل كما يوضح المواصفات الفنية المطلوبة لسبائك الزهر المنتجه

جدول (٣)

التركيب الكيمائى	زهرة التمساح	زهرة خردة	صلب خرده	المواصفات الفنية المطلوبة	
كربون	٣٫٧٢	٢٫٤	١٫٠٨	٢٫٩٥ ± ٫٢٥	
سليكون	١٫٦	١٫٧٤	٫٨٨	١٫٥	حد أقصى
منجنيز	١٫٠٢	١٫٣٨	١٫٧	١٫٢٥ ∓ ٫١٥	
فوسفور	٫١٠	٫٢٠	٫٢٥	٫٢٢	حد أدنى
كبريت	٫٢٢	٫٣٣	٫٠٥٥	٫٢٥	حد أقصى
حديد	٩٣٫٣٤	٩٤٫٠٥	٩٦٫٠٤		

والمطلوب تحديد قيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ التى هى هنا نسب السبك أو نسب استخدام المكونات الداخله باستخدام مفهوم نماذج المزج تكون القيود الفنية هى :

$$٣٫٣ \leqslant \frac{٣٫٧٢ س_1 + ٢٫٤ س_2 + ١٫٠٨ س_3}{س_1 + س_2 + س_3} \leqslant ٢٫٧$$

$$\text{١و٥٠} \geqslant \frac{\text{٨٨وس}_{٣} + \text{٧٤و١س}_{٢} + \text{٦و١س}_{١}}{\text{س}_{٣} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{١}}$$

$$\text{١و٢} \leqslant \frac{\text{٧و١س}_{٣} + \text{٢٨و١س}_{٢} + \text{٠٢و١س}_{١}}{\text{س}_{٣} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{١}} \leqslant \text{١,٥٠}$$

$$\text{٢٢و} \leqslant \frac{\text{٢٥وس}_{٣} + \text{٢وس}_{٢} + \text{١,س}_{١}}{\text{س}_{٣} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{١}}$$

$$\text{٢٥و} \geqslant \frac{\text{٠٥٥وس}_{٣} + \text{٢٣وس}_{٢} + \text{٢٢وس}_{١}}{\text{س}_{٣} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{١}}$$

ولما كانت $\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{٣} = ١$ فإنه يمكن وضع القيود السابقة بصورة أكثر مناسبة كما يلي : —

$$\text{٣و٢} = \quad \text{س}_{٤} + \text{٠٨و١س}_{٣} + \text{٢و٤س}_{٢} + \text{٣و٧٢س}_{١}$$

$$\text{٢و٨} = \text{س ه}_{١}+ \quad \text{س}_{٥}- \quad \text{١,٠٨س}_{٣} + \text{٢و٤س}_{٢} + \text{٣و٧٢س}_{١}$$

$$\text{١,٥} = \quad \text{س}_{٦}+ \quad \text{٨٨وس}_{٣} + \text{٧٤و١س}_{٢} + \text{٦و١س}_{١}$$

$$\text{١و٥} = \quad \text{س٧}+ \quad \text{٧و١س}_{٣} + \text{١,٢٨س}_{٢} + \text{١,٠٢س}_{١}$$

$$\text{١و٢} = \text{س ه}_{٢}+ \quad \text{س}_{٨}- \quad \text{٧و١س}_{٣} + \text{٢٨و١س}_{٢} + \text{٠٢و١س}_{١}$$

$$\text{٢٥و} = \quad \text{س}_{٩}+ \quad \text{٠٥٥وس}_{٣} + \text{٢٣وس}_{٢} + \text{٢٣وس}_{١}$$

$$\text{٢٢و} = \text{س ه}_{٣}+ \quad \text{س}_{١٠}- \quad \text{٢٥وس}_{٣} + \text{٢٥وس}_{٢} + \text{١وس}_{١}$$

$$١ = \text{س ه}_{٤}+ \quad \text{س}_{٣} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{١}$$

والمعادلات السابقة تمثل القيود الموضوعة بينما ينقصنا تحديد داله الهدف .

فى معظم التطبيقات من هذا النوع قد يهمنا أن تكون النسبة المحددة لأحد عناصر قريبة قدر الإمكان من المواصفة الموضوعة. لها — وعلى سبيل المثال إذا كان عنصر السليكون فى حالتنا له أهمية خاصة للمسبوك فمعنى هـذا أن $س_٩$ التى تمثل الفرق بين المواصفة الموضوعة (٥و١٪) والتركيب الكيميائى الناتج يجب أن تكون أقل ما يمكن :

فى هذه الحالة تكون دالة الهدف :

$$تدنيه\ س_٩ + ك (س هـ_١ + س هـ_٢ + س هـ_٣ + س هـ_٤)$$

يمكن أيضا أن نضع جميع الانحرافات للنسب المئوية وتكون عليه الهدف :

$$س_٤ + س_٥ + س_٢ + س_٧ + س_٨ + س_٩ + س_١$$
$$+ ك (س هـ_١ + س هـ_٢ + س هـ_٣ + س هـ_٤)$$

وفى الحالة السابقة نكون جميع الانحرافات لها نفس الأهمية — إلا أنه يمكن وضع أوزان مخالفة للإنحرافات تقيس الأهمية النسبية لها

$$و_١ س_٤ + و_٢ س_٥ + و_٣ س_٢ + و_٤ س_٧ + و_٥ س_٨ + و_٦ س_٩$$

$$+ ك (س هـ_١ + س هـ_٢ + س هـ_٣ + س هـ_٤)$$

تسمى مسألة البرمجة الخطية بالصورة السابقة بدالة الهدف بالبرمجة الهدفية Goal Programming وسوف نرجع إلى دراسة هذا النوع تفصيلا فى الباب الخاص بالبرمجة عديدة الأهداف .

يمكن أيضا استخدام نماذج المزج السابقة فى صناعة كيماوية أخرى مثل

صناعة الاسمدة وصناعة الزجاج حيث فى الحالة الأخيرة يتم خلط مجموعة من المكونات تعطى الأكاسيد اللازمة للزجاج والمحددة لصفات نوع الزجاج المنتج مثل اللزوجة ومعامل التوصيل الحرارى ومعامل التوصل الكهربائى والكثافة ويمكن أن تكون دالة الهدف تكلفة إنتاج الزجاج من تكلفة نسب خلط المكونات أو تقليل الانحرافات بين المواصفات الموضوعة والناتجة .

(٣ — ١٠ — ٣) مسائل التخصيص والتوزيع : أحد المسائل الهامة فى مجموعة تطبيقات البرمجة الخطية .

والتخصيص هنا إصطلاح عام — قد يقصد به تخصيص كميات منقولة بين أصول وغايات . (وهو ما سوف يتم دراسته فى الباب الخاص بنماذج النقل) أو تخصيص أفراد أو أدوات إنتاج لإنجاز أعمال أو مهام معينه أو تخصيص موارد

سوف نتعرض هنا لدراسة نماذج تخصيص الموارد بما يعرف بمسألة الاستثمار ومسألة تعيين المسار لتقليل الجهد المبذول معبراً عنه بالمسافة أو بالزمن ثم نتعرض أخيراً للنماذج المتكاملة للتوزيع(١) .

(١) مسألة الاستثمارات(٢) : يمكن التعبير عن هذه المسألة على النحو التالى : لنفترض مشروعات عددها ن وتمثل ر دليل المشروع حيث :

ر = ١ ، ٢ ، ١ ، ... ، ن

ويفترض أن اتخاذ القرار بشأن المشروعات يؤثر خلال فترة فاعليه أو فترة الانجاز التى يقدر لها عدد من الفترات قدرها م (سنوات مثلا) ونمثل (و) دليل الفتره حيث و = ١ ، ٢ ، ١ ، ... ، م .

---

(١) Mathe ma'ical Models for Integerated Production and distributi.n Planning - Mokhtar S. Bazaraa PEADAC-80 (Inv-6)

(٢) مرجع سابق Ben Israel et al

وفى كل فترة زمنية (و) يتوفر لدى متخذ القرار كمية من رأس المال المتاح — رأس المال المتاح ناتج من أنشطة أخرى منتجه لرأس المال وليست فى النموذج موضوع الدراسة :

ويفترض أيضا معلومية التدفق النقدى المصاحب للمشروع (ر) فى الفترة (و) الذى يتحدد بالمعاملات $ا_{ور}$. والتى يتم تعريفها كما يلى :

$ا_{ور} < $ صفر   تعنى إنفاق

$ا_{ور} > $ صفر   تعنى عائد أو دخل

وبهذا التعريف يمكن أن نعتبر أن كل مشروع خلال الفترة م يحتاج إلى فترة انفاق تكون فيها $ا_{ور} < $ صفر ثم يتبع ذلك فترة انتاج أو عائد تكون فيها $ا_{ور} > $ صفر .

ولتحقيق الشمول العملى للمسألة فإننا سوف نفترض أنه يمكن لمتخذ القرار أن يستدين جزء من رأس المال المطلوب فى أى فترة وفى حالة احتياجه لذلك . كما يمكن أيضاً أن يودع جزءاً من رأس المال فى حالة عدم احتياجه له . وهذا الجزء سوف نرمز له بالمتغير $ص_و$. حيث طبقاً لما سبق تكون :

$ص_و > $ صفر   فى حالة الاستدانة

$ص_و < $ صفر   فى حالة الايداع

وسوف نفترض أن سعر الفائدة = ف — كما أننا سوف نفترض أن $ع_ر$ تمثل العائد الكلى للمشروع ر خلال عمره الانتاجى المخطط . وأن $س_ر$ تمثل متغير القرار لاختيار المشروع ر أو عدم اختياره بحيث أن :

$س_ر = 1$ تعنى اختيار المشروع

$س_ر = $ صفر تعنى عدم اختيار المشروع

فى هذه الحالة يمكن صياغة المسألة على النحو التالى :

$$\text{اجعل } ع = \sum_{ر=1}^{ن} ع_ر \, س_ر + ص_م \quad \text{أكبر ما يمكن مستوفياً} \qquad (٧٥)$$

$$\text{صفر} \leqslant \sum_{ر=1}^{ر=ن} ا_{1ر} \, س_ر + ص_1 \leqslant ك_1 \qquad (٧٦)$$

$$\text{صفر} \leqslant \sum_{ر=1}^{ر=ن} ا_{ور} \, س_ر + ص_و - (1+ف) \, ص_{و-1} \leqslant ك_و$$

$$و = ٢ ، ٣ ، \ldots ، م \qquad (٧٧)$$

$$\left.\begin{array}{l} ١ \geqslant س_ر \geqslant \text{صفر} \\ س_ر = \text{أعداد صحيحة} \end{array}\right\} \qquad (٧٨)$$

والمعادلة (٧٥) تحدد العائد الكلى من المشروعات مضافاً إليها القيمة المودعة فى نهاية فترة التخطيط (م) . أما القيد (٧٦) والخاص بالفترة الأولى فهو ينص على أن مجموع الدفقات النقدية الناتجة من مجموعة المشروعات مضافاً إليه القيمة المودعة لا تزيد عن الكمية المتاحة للاستثمار . ويحدد القيد (٧٧) نفس الشرط للفترات و > ١ حيث يلاحظ أضافة القيمة الحالية للودائع فى الفترة السابقة (و — ١) . أما القيد (٧٨) فهو يضمن أن يأخذ $س_ر$ القيمة واحد أو صفر طبقا لاختيار المشروع من عدمه .

ويلاحظ هنا أننا لم نذكر قيد عدم السلبية على المتغيرات $ص_و$ حيث انها فى الواقع لاتخضع لهذا القيد ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة ولإمكانية الحل بطريقة السمبلكس يجب كما ذكرنا سابقا للمتغيرات الغير مقيدة الإشارة استبدال كل متغير $ص_و$ بمتغيرين $ص'_و$ ، $ص''_و$ حيث (راجع (٣-٣) بند III)

$ص_و = ص'_و - ص''_و$ وكلا من $ص'_و$ ، $ص''_و \geqslant$ صفر وبذلك تكون مسألة الاستثمار

$$\text{عظم } ع = \sum_{ر=1}^{ن} ع_{ر}\, س_{ر} + (ص_{م} - \bar{ص}_{م})$$

مقيدا

$$\text{صفر} \leqslant \sum_{ر=1}^{ن} أ_{1ر}\, س_{ر} + (ص_{1} - \bar{ص}_{1}) \leqslant ك_{1}$$

$$\text{صفر} \leqslant \sum_{ر=1}^{ن} أ_{ور}\, س_{ر} + (ص_{و} - \bar{ص}_{و}) - (1+ف)(ص_{و-1} - \bar{ص}_{و-1}) \leqslant ك_{و} \qquad و > 1 \qquad (٧٩)$$

$$1 \geqslant س_{ر} \geqslant \text{صفر} ،\ س_{ر} \text{ أعداد صحيحة}$$

$$ص_{و} ،\ \bar{ص}_{و} \geqslant \text{صفر} \quad و = ١، ...، م$$

$$ر = ١، ...، ن$$

المشروع / الخطة	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	عائد المشروع
	التدفقات السنوية		مقدرة بالمليون جنيه			
(١)	٢,٥٠	١,٥٠	-٠,٥٠	-١,٥٠	-٢,٠٠	٢,٥٠
(٢)	١,٥٠	٣,٠٠	-٣,٠٠	-١,٠٠	-٢,٠٠	٣,٠٠
(٣)	٠,٥٠	٠,٥٠	٠,٥٠	٤,٠٠	-١,٠٠	٦,٠٠
(٤)	صفر	صفر	١,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٦,٠٠
(٥)	صفر	٠,٠٠	١,٠٠	١,٥٠	٢,٥٠	٥,٠٠
(٦)	٦,٠٠		١,٠٠	-٢,٠٠	-٣,٠٠	٦,٠٠
(٧)	صفر	صفر	٠,٥٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٨,٠٠
المتاحات السنوية ك و	٧,٥٠	٤,٠٠	٦,٥٠	٥,٠٠	٥,٠٠	

وعلى سبيل المثال إذا اعتبرنا [جدول (٤)] والمحدد القيم $ك_{و}$ ، $ع_{ر}$ ، $أ_{ور}$ المجموعة المشروعات السديد ($ن = ٣$) الأحد الخطط الخمسية ($م = ٥$) :

وبفرض أن ف = ٠,١ يكون نموذج الإستثمار طبقا للاقتراح السابق هو :

عظم :

ع = ٢,٥ س١ + ٣ س٢ + ٦ س٣ + ١ س٤ + ٥,٥ س٥ + ٦ س٦ + ٨ س٧

مستوفيا

صفر ≤ ٢,٥ س١ + ١,٥ س٢ + ١,٥ س٢ + ٠,٥ س٣ + ٦ س٦
+ (ص'١ − ص"١) ≤ ٧,٥

صفر ≤ ١,٥ س١ + ٣ س٢ + ٠,٥ س٣ + س٥ + س٦
− ١,١ (ص'١ − ص"١) + (ص'٢ − ص"٢) ≤ ٤,٥

صفر ≤ − ٠,٥ س١ + ٣ س٢ + ٠,٥ س٣ + س٤ + س٥ − س٦ + ٠,٥ س٧
− ١,١ (ص'٢ − ص"٢) + (ص'٣ − ص"٣) ≤ ٦,٥

صفر ≤ − ١,٥ س١ − س٢ + ٤ س٣ + ٢ س٤ + ١,٥ س٥ − ٢ س٦ + ٣ س٧
− ١,١ (ص'٣ − ص"٣) + (ص'٤ − ص"٤) ≤ ٥,٠٠

صفر ≤ − ٢ س١ − ٢ س٢ − س٣ + ٤ س٤ + ٢,٥ س٥ − ٣ س٦ + ٤ س٧
− ١,١ (ص'٤ − ص"٤) + (ص'٥ − ص"٥) ≤ ٥,٠٠

١ ≥ سر ≥ صفر ، سر عدد صحيح ر = ١ ، ... ، ٧

ص'و ، ص"و ≥ صفر و = ١ ، ... ، ٥

ومن الممكن أيضاً أن تعتبر قيم المخصصات السنوية للاستثمار غير معلومة والمعلوم فقط القيم الكلية المخصصة للاستثمارات فى السنوات الخمسية .

أى :

$$ك_١ + \frac{ك_٢}{١+ف} + \frac{ك_٣}{(١+ف)^٢} + \frac{ك_٤}{(١+ف)^٣} + \frac{ك_٥}{(١+ف)^٤}$$

$\leqslant ك$ أو على وجه العموم :

$$\sum_{و=١}^{و=م} \frac{ك_و}{(١+ف)^{و-١}} \leqslant ك \qquad (٨٠)$$

وفى هذه الحالة يتضمن حل المسألة إيجاد تشكيلة المشروعات وفى نفس الوقت أمثل توزيع للاستثمارات خلال حقبة التخطيط ويسمى القيد (٨٠) السابق بالقيد الرابط (القيد القارن Coupling Constraint) للاستثمارات .

ويلاحظ أنه فى الصياغة المعبر عنها فى النموذج (٧٩) لمسألة الإستثمار وبدراستنا السابقة للبرمجة الخطية الفاصلة فى إمكانية الحصول على بعض الحلول الصريحة لمسألة البرمجة الخطية (بند ٣ - ٩) أنه بإجراء بعض التحويلات يمكن صياغة مسألة الإستثمار السابقة فى الصورة المناسبة لاستخدام البرمجة الخطية الفاصلة كما يلى :

أجعل :

$$\left.\begin{array}{l} ع = عَ سـ + هـَ ص \\ \text{مستوفيا} \\ ر_١ \leqslant سـ \qquad \leqslant ك_١ \\ ر_٢ \leqslant أ سـ + ف ص \leqslant ك_٢ \end{array}\right\} \qquad (٨١)$$

حيث سـ ، ك$_١$ ، ر$_١$ ، عَ مصفوفات (ن × ١) وحيث ص ، ك$_٢$ ، ر$_٢$ ، هـ مصفوفات (١ × م) وحيث أ ، ف مصفوفات (م × م)

المسألة السابقة (٨١) بمقارنتها بالمسألة (٨٣) نجد العلاقات التالية بين المسألتين :

$$ا = \begin{bmatrix} ى_{به} & \vdots & صفر \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ أ & \vdots & ف \end{bmatrix} \qquad س = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} ك_1 \\ ك_2 \end{bmatrix} \qquad ى = \begin{bmatrix} ر_1 \\ ر_2 \end{bmatrix} \qquad (٨٢)$$

وبالتالى فإن مقلوب المصفوفة [ا] الجديدة وهو $[ا]^{-1}$ يعطى من (راجع جبر المصفوفات)

$$[ا]^{-1} = \begin{bmatrix} ى_{به} & \vdots & صفر \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ف^{-1}أ & \vdots & ف^{-1} \end{bmatrix} \qquad (٨٣)$$

فإذا استخدمنا التعويض :

$$\begin{bmatrix} ق_س \\ ق_ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ا \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \qquad (٨٤)$$

لحصلنا على المسألة التالية :

عظم :

$$\left. \begin{aligned} & ع = [\,عَ - هـَ ف^{-1} أ\,] س + هـَ ف^{-1} ص \\ & \text{مستوفيا} \\ & ر_1 \leqslant س \leqslant ك_1 \\ & ر_2 \leqslant ص \leqslant ك_2 \end{aligned} \right\} \qquad (٨٥)$$

حيث يعطى الحل الأمثل من المتجة :

$$س^* = \begin{bmatrix} س^* \\ ص^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ق_س \\ ق_ص \end{bmatrix} \qquad (٨٦)$$

حيث :

$$ق_س = \begin{cases} ك_{١ر} & \text{إذا كانت } [ع^- - هـ^- ف^{-١} أ] > \text{صفر} \\ س_{١ر} & \text{إذا كانت } [ع^- - هـ^- ف^{-١} أ] < \text{صفر} \\ \lambda ك_{١ر} + (١ - \lambda) س_{١ر} & \text{إذا كانت } [ع^- - هـ^- ف^{-١} أ] = \text{صفر} \end{cases} \qquad (٨٧)$$

وحيث :

$$ق_س = \begin{cases} ك_{٢و} & \text{إذا كانت : } هـ^- ف^{-١} > \text{صفر} \\ س_{٢و} & \text{إذا كانت : } هـ^- ف^{-١} < \text{صفر} \\ \lambda ك_{٢و} + (١ - \lambda) س_{٢و} & \text{إذا كانت } هـ^- ف^{-١} = \text{صفر} \end{cases} \qquad (٨٨)$$

وبالتعويض في (٨٥) بدلالة $أ^{-1}$ من (٨٢) نحصل :

$$\begin{cases} س^* = ق_س \\ ص^* = ق_س ف^{-١} - ف^{-١} أ ق_س \end{cases} \qquad (٨٩)$$

ولتوضيح المفاهيم السابقة سوف نحاول حل مسألة الإستثمار فى جدول (٤) حيث لا يصعب علينا أن نتعرف على المصفوفة [أ]

[أ°] = المشاريع (ر)

المشاريع \ السنوات	١	٢	٣	٤	٥
١	٢,٥	١,٥	—٠,٥	—١,٥	—٢
٢	١,٥	٣	٣	—١	—٢
٣	٠,٥	٠,٥	٠,٥	٤	—١
٤	صفر	صفر	١	٢	٤
٥	صفر	١	١	١,٥	٢,٥
٦	٦	١	—١	—٢	—٣
٧	صفر	صفر	٠,٥	٣	٤

والمصفوفة ف

ف =

١	٠	٠	٠	٠
—١,١	١	٠	٠	٠
٠	—١,١	١	٠	٠
٠	٠	—١,١	١	٠
٠	٠	٠	—١,١	١

ومنها يمكن حساب ف^{-1}

$$\text{ف}^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ١,١ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ (١,١)^{٢} & (١,١) & ١ & ٠ & ٠ \\ (١,١)^{٣} & (١,١)^{٢} & (١,١) & ١ & ٠ \\ (١,١)^{٤} & (١,١)^{٣} & (١,١)^{٢} & (١,١) & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها يمكن حساب $[\text{عَ}_{ر} - (\text{هـَ ف}^{-1}\text{أ})_{ر}]$

حيث :

$\text{عَ} = [٢,٥ \quad ٣ \quad ٦ \quad ٦ \quad ٥,٥ \quad ٦ \quad ٨]$

$\text{هـَ} = [٠ \quad ٠ \quad ٠ \quad ٠ \quad ١]$ كما يلي :

$$\text{ع}_{١} - (\text{هـَ ف}^{-1}\text{أ})_{١} = ٢,٥ - [(١,١)^{٤}\,٢,٥ + (١,١)^{٣}\,١,٥ - (١,١)^{٢}\,,٥ - (١,١)\,١,٥ - ٢] < \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س}_{١} = ١$$

$$(\text{ع}_{٢} - \text{هـَ ف}^{-1}\text{أ})_{٢} = ٣ - [(١,١)^{٤}\,١,٥ + (١,١)^{٣}\,٣ + (١,١)^{٢}\,٢ - ٢\times(١,١) - ٢] > \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س}_{٢} = \text{صفر}$$

ع٣ = (هـ ف⁻¹ أ)٣ = ٦ − [(١,١)⁴ ٥و + ٥و (١و١)³ +
٥و (١و١)² + ٤ (١,١) − ١] > صفر

∴ س٣ = ١

ع٤ − (هـ ف⁻¹ أ)٤ = ٦ − (صفر + صفر + (١و١)² ١ +
(١و١) × ٢ + ٤] > صفر

∴ س٤ = صفر

ع٥ − (هـ ف⁻¹ أ)٥ = ٥و٥ − [صفر + (١و١)² + (١و١)³
+ (١و١) ٥و١ + ٥و٢] ≥ صفر

∴ س٥ = صفر

ع٦ − (هـ ف⁻¹ أ)٦ = ٦ − [(١و١)⁴ × ٦ + (١,١)³ × ١
+ (١و١)² × ١ − ٢ (١و١) − ٣] > صفر

∴ س٦ = ١

ع٧ − (هـ ف⁻¹ أ)٧ = − [صفر + صفر + (١،١)² ٥و +
(١،١) ٣ + ٤] > صفر

∴ س٧ = ١

وبذلك تكون المشاريع المقبولة (والتى لها سر = ١)	والمشاريع المرفوضة (والتى لها سر = صفر)
١	٢
٣	٤
٦	٥
٧	

ويلاحظ أن حل المسألة السابقة كان مباشراً وأسهل بكثير من الحل بطريقة السمبلكس فضلا على أن مسألة الاستثمار نظراً لعدم قابلية المتغيرات س ر للتجزئة (اما قبول المشروع أو عدم قبوله لذلك لا يمكن أن يأخذ المتغير س ر قيمة غير صحيحة أو كسر) تقع فى نطاق البرمجة الخطية العددية بل فى الواقع تقع فى نطاق البرمجة الخطية العددية (المختلطة) كما سوف نتعرض لذلك فى باب منفصل .

(ii) مسائل التوزيع .

سوف نتعرض فى الباب الرابع لمجموعة خاصة من مسائل التوزيع تسمى بمسألة النقل حيث يمكن فى هذه الحالة استخدام طرق حل ذات كفاءة عالية وسوف نتعرض أيضاً إلى بعض التطبيقات الخاصة لمسألة النقل والمعروفة باسم مسائل التخصيص Assignment Problem ومسائل متعهد الطعام Caterer Problem

ولكن المسألة التى سوف نناقشها فى هذا البند مسائل توزيع ذات مستوى معين مما يصلح معه أن نسميها مسائل التوزيع المتكاملة ويمكن وصف هذه المسألة كما يلى :

تملك شركة مجموعة من المصانع تنتج الحديد من المنتجات التى يمكن تصنيفها إلى مجموعات رئيسية من السلع .

وطبقاً للمعلومات المحددة عن الاستهلاك فى مناطق الاستخدام (فى الفترات المحددة أسبوعياً أو شهرياً طبقاً لدرجة التفصيل المطلوبة) يتم تحديد مستويات الإنتاج لمختلف السلع فى مختلف المصانع . ثم يتم توزيع السلع من مختلف المصانع إلى المستهلكين إما مباشرة أو من خلال مراكز توزيع وسيطة .

هذا النوع من المسائل ينشأ فى العديد من الصناعات الإلكترونية - وصناعات الغزل - وصناعات الورق - وصناعات الأغذية المعلبة .

وفى صناعات الغزل مثلا تختلف المنتجات طبقا للخامة واللون والنسج والطباعة ، وبالرغم من أن عدد المنتجات يكون بالآلاف إلا أنه غالبا ما يمكن تصنيفه إلى مجموعات أقل بكثير من هذا العدد . ويتم توزيع المنتج إلى موزعى الجملة أو التجزئة أو كبار المستهلكين من خلال مستودعات المناطق أو مراكز التوزيع أو منافذ البيع . وتشمل المسألة ما يلى :

١ — تشكيلة المنتجات فى المصانع من حيث النوع ومستوى الإنتاج .

٢ — موقع وطاقة مراكز التوزيع (ويمكن إفتراض إمكانية تأجير مراكز التوزيع فى حالة عدم ملكيتها للشركة)

٣ — تحديد مناطق العملاء التابعة لمركز التوزيع .

٤ — حجم الإنتاج (الأسبوعى - الشهرى) لكل السلع فى المصانع .

٥ — كيفية التوزيع من المصانع إلى العملاء .

ويلاحظ أن القرارات الاستراتيجية مثل (١) ، (٢) ، (٣) تتخذ كل فترة طويلة (سنويا مثلا) إما قرارات العمليات التفصيلية مثل (٤) ، (٥) فإنها تتخذ أسبوعيا (أو شهريا) .

وشكل (٤) يبين هيراركية القرارات لهذه المسألة .

نموذج تحديد المواقع

(أ) موقع وطاقة مراكز التوزيع

(ب) مناطق العملاء التابعة لمراكز التوزيع

(ح) مستويات الإنتاج (السنوية) المصانع

↓

برنامج الإنتاج والتوزيع الاسبوعى

(أ) تحديد تشكيلة المنتجات الاسبوعية

(ب) تحديد الكميات المشحونة من المصانع إلى مراكز التوزيع

↓

تحديد المسار (مسار النقل)

(أ) نقل المنتجات من المصانع إلى مراكز التوزيع

(ب) نقل المنتجات من مراكز التوزيع الى المستهلكين

شكل (٤) هيراريكية نموذج الانتاج/التوزيع المتكامل

وفيما يتعلق بنموذج تحديد المواقع :

فسوف يتم تعريف ما يلى :

و = دليل المصنع .

ن = دليل مركز التوزيع .

ك = دليل منطقة العملاء .

ل = دليل المنتج .

$ح_{ول}$ = تكلفة إنتاج الوحدة من المنتج ل فى المصنع و

$ط_{ول}$ = الطاقة الإنتاجية لإنتاج المنتج ل فى المصنع و

$ص_{ونكل}$ = كمية المنتج ل المنقول من المصنع و إلى منطقة العملاء ك عن طريق مركز التوزيع ن

$أ_{ونل}$ = تكلفة نقل وحدة المنتج ل من المصنع و إلى مركز التوزيع ن

$ف_{نكل}$ = تكلفة نقل الوحدة من المنتج ل من مراكز التوزيع ن إلى منطقة العملاء ك

$ع_{ن}$: $ع_{ن}$ = ١ إذا كان مركز التوزيع متاح عند الموقع ن . فإذا لم يتحقق ذلك فإن $ع_{ن}$ = صفر

ن = دليل مراكز التوزيع التى تحقق شرط $ع_{ن}$ = ١

$هـ_{نل}$ = تكلفة نقل وحدة المنتج ل إلى مركز التوزيع ن

$ف_{ن}$ = تكلفة إيجار مركز التوزيع ن

تـ$_{ر}$ = التكلفة الثابتة لإنشاء مركز توزيع جديد فى الموقع ر

غـ$_{ر}$ = الحد الأقصى لتوزيع مركز التوزيع ر

د$_{ر}$ = الحد الأدنى لتوزيع المركز ر

ء$_{ك ل}$ = الطلب على المنتج ل فى منطقة الاستهلاك ك

س$_{ر ك}$ = س$_{ر ك}$ = ١ إذا كان مركز التوزيع ر يخدم عملاء المنطقة ك . وعدا ذلك فإن س$_{ر ك}$ = صفر

ويمكن بذلك صياغة النموذج التالى :*

مدنية :

ع = مجـ$_{و}$ مجـ$_{ل}$ حـ$_{و ل}$ (مجـ$_{ر}$ مجـ$_{ك}$ ص$_{و ر ل ك}$) + مجـ$_{و}$ مجـ$_{ر}$

مجـ$_{ك}$ مجـ$_{ل}$ (ا$_{و ر ل}$ + ـ$_{ر ك ل}$) (ص$_{و ر ل ك}$)

+ مجـ$_{ر = ز}$ ف$_{ر}$ + مجـ$_{ر \neq ز}$ (ف$_{ر}$ + ت$_{ر}$) ع$_{ر}$

+ مجـ$_{ر}$ مجـ$_{ل}$ هـ$_{ر ل}$ (مجـ$_{و}$ مجـ$_{ك}$ ص$_{و ر ل ك}$) (٩٠)

---

* النموذج يقع فى نطاق البرمجة الخطية العددية المختلطة ونظراً لكثرة المتغيرات والقيود فإن بعض الطرق استحدثت للحل تعتمد أساساً على تحليل المسألة Decomposition عا يمكن معه اختزالها إلى مجموعة من مسائل النقل سهلة الحل . وللتفصيلات أكثر فى هذا الموضوع راجع :

(1) Geoffrion and Graves « Multi-Commidity Distribution system Design by Bender Decomp:sition » Management Science Vol. 20 PP 222 – 244 .

(2)Swe. ny and Murphy « A Method of Decomposition of Intger Program » 1979 Jr. ORSA Vol. 27 № 9 dd 128 — 1141.

مستوفيا

$$\sum_{ر} \sum_{ك} \text{ص}_{ورك ل} \leq \text{ط}_{ول}$$

(قيود طاقة الإنتاج للمصانع) (٩١)

$$\sum_{و} \text{ص}_{ورك ل} = \text{ك}_{ل} \, \text{س}_{رك}$$

(قيود الوفاء بطلب العملاء) (٩٢)

$$\sum_{ر} \text{س}_{رك} = ١$$

(قيد يخصص مركز توزيع واحد لمنطقة الاستهلاك) (٩٣)

$$\text{ع}_{ر} \text{ق}_{ر} \leq \sum_{و} \sum_{ك} \text{ص}_{ورك ل} \leq \text{ع}_{ر} \text{د}_{ر} \qquad ر = ز$$

$$\text{ق}_{ر} \leq \sum_{و} \sum_{ك} \text{ص}_{ورك ل} \leq \text{د}_{ر} \qquad ر \neq ز$$

(قيود حدود التوزيع المقبولة لمراكز التوزيع) (٩٤)

$$١ \geq \text{ع}_{ر} ، \text{س}_{رك} \geq \text{صفر} \quad \text{وأعداد صحيحة}$$

$$\text{ص}_{ورك} \geq \text{صفر}$$

ويلاحظ فى دالة الهدف أن تكلفة استخدام مراكز توزيع قائمة (ر = ز) هى تكلفة الايجار (أو الاستخدام) ف $_{ر}$ بينما فى حالة إنشاء مراكز جديدة (ر ≠ ز) فإنه يضاف إلى ذلك التكلفة الثابتة للتأجير الجديد أو الانشاء جـ $_{ر}$.

وأما بالنسبة لنموذج خطط الإنتاج والتوزيع التفصيلية (أسبوعية فى الصياغة الحالية) فسوف نعرف ما يلى :

جول = مستوى الإنتاج للسلعة ل فى المصنع و

تول = تكلفة إنتاج وحدة الإنتاج من السلعة (المنتج) ل فى المصنع و

طول = الطاقة الإنتاجية للمنتج ل فى المصنع و

حول = الحد الأدنى للمخزون من المنتج ل فى المصنع و

صول = المخزون الإبتدائى للسلعه ل فى المصنع و فى بداية الأسبوع

صول = المخزون النهائى للسلعة ل فى المصنع و فى نهاية الأسبوع

ثول = تكلفة الحفظ على المخزون أسبوعيا للوحدة من المنتج ل فى المصنع و

ر(ك) = مركز التوزيع ر الذى يخدم منطقة العملاء ك

ص ور ر(ك)كل = كمية الإنتاج من المنتج(ل) المشحونة من المصنع ولمنطقة العملاء ك عن طريق مركز التوزيع ر (ك)

هرل = تكلفة مناولة وحدة المنتج ل عند مركز التوزيع ك

دكل = الطلب على السلعة (المنتج) ل عند منطقة العملاء ك

أورل = تكلفة النقل للوحدة من المنتج ل من المصنع و إلى مركز التوزيع ر

ب ركل = تكلفة نقل الوحدة من السلعة ل من مركز التوزيع ر إلى منطقة العملاء ك

وبذلك يمكن صياغة النموذج التالى :

تدنيه :

$$\text{ع ن} = \sum_{\text{و}} \sum_{\text{ل}} \text{ت}_{\text{ول}} \, \text{ج}_{\text{ول}} + \sum_{\text{و}} \sum_{\text{ل}} \text{ث}_{\text{ول}} \, \text{م}_{\text{ول}} + \sum_{\text{ر}} \sum_{\text{ل}} \text{هـ}_{\text{رل}}$$

$$\left(\sum_{\text{و}} \sum_{\text{ك}} \text{ص}_{\text{ورك ل}} \right) + \sum_{\text{و}} \sum_{\text{ك}} \sum_{\text{ل}} \left(\text{ا}_{\text{ور(ك)ل}} + \text{ب}_{\text{ور(ك)ل}} \right)$$

$$\text{ص}_{\text{ور(ك)كل}} \qquad (٩٦)$$

مستوفيا

$$\text{ج}_{\text{ول}} < \text{ط}_{\text{ول}} \qquad \text{(قيود الطاقة الإنتاجية المتاحة)} \qquad (٩٧)$$

$$\text{م}_{\text{ول}} = \text{م}_{\text{·ول}} + \text{ج}_{\text{ول}} - \sum_{\text{ك}} \text{ص}_{\text{ور(ك)كل}}$$

$$\text{(علاقة مخزون آخر المدة بمخزون بداية المدة)} \qquad (٩٨)$$

$$\text{م}_{\text{ول}} \geqslant \text{ح}_{\text{ول}} \qquad \text{(قيود الحد الأدنى المسموح به للمخزون)} \qquad (٩٩)$$

$$\sum_{\text{و}} \text{ص}_{\text{ور(ك)كل}} = \text{د}_{\text{لك}} \qquad \text{(قيود الوفاء بطلبات العملاء)} \qquad (١٠٠)$$

$$\text{ج}_{\text{ول}} \geqslant \text{صفر} \quad ، \quad \text{ص}_{\text{ورك ل}} \geqslant \text{صفر}$$

وهى مسألة برمجة خطية نمطية . حيث تحدد دالة الهدف التكلفة الكلية متضمنة تكلفة الإنتاج أو الحفظ على المخزون والمناولة والنقل .

أما تحديد المسار للسلع من المصانع إلى المستهلكين :

فإنه غالباً يتم على مرحلتين الأولى منها نقل السلع من المصانع إلى مستودعات المناطق أو مراكز التوزيع الرئيسيه وفى المرحله الثانيه يتم تحريكها من مراكز التوزيع إلى العملاء .

فى معظم الاحيان تختلف صياغة المسأله * اختلافاً بيناً طبقاً لطبية التطبيق ودرجة التفصيل. ولإعطاء القارىء فكره عن التركيبات فى هذه المسأله فإنه يجب أن نأخذ فى اعتبارنا ما يلى :

(أ) طريقة تشغيل مركز التوزيع .
وتشمل عدد أيام العمل فى الاسبوع ومواعيد العمل . لأن عاده تنتظر المركبات لليوم التالى فى حال الوصول إلى مراكز التوزيع بعد مواعيد العمل فضلا عن ضرورة الارتباط الزمنى بين وصول السلع إلى مراكز التوزيع والطلب عند هذه المراكز .

(ب) تجميع البضائع من مجموعة المصانع المتقاربه إلى نفس مراكز التوزيع لتحقيق أكبر معامل استغلال للمركبات .

(حـ) تفريغ ونقل البضائع .
والمقصود بها إمكانية قيام المركبات بتفريغ حمولتها فى بعض مراكز التوزيع لتنقل بواسطة مركبات أخرى لغايات أخرى كما تشمل أيضاً

(*) نظراً لكثرة التوافيق الممكنة فى مسألة تحديد المسار على وجه العموم فإن إستخدام طرق البرمجة لحصول على حلول مثلى لا يجدى نظراً لأن المسائل التى تنشأ فى الحياة العملية تؤدى إلى عدد من المتغيرات تفوق إمكانية الحل حتى بإستخدام الآلات الحاسبة الالكترونية . لذلك تستخدم طرق تجريبية للحصول على حلول شبه مثلى بكفاءة حساب عالية راجع على سبيل المثال :

Gillet and Miller « A Heuristic Algorithm for Vehicle Dispatching Problem » Jr. orsa Vol. 12 pp 340 - 349 1974

طريقة وضع البضائع بحيث تشمل طريقة تفريغها طبقاً لترتيب مرورها على مراكز التوزيع .

(ى) قيود الوفاء بالطلبات طبقاً للبرنامج الزمنى .

(هـ) قيود الحموله للمركبات طبقاً لقواعد المرور الطرق فى المسار .

(ii) مسألة التتابع Sequencing Problem

أحد التطبيقات الهامه للبرمجه الخطيه (العدديه) . ويمكن وصف المسألة كما يلى :

هناك عدد من الماكينات أو المراكز المنتجه وفى نفس الوقت لدينا مجموعه من السلع أو المنتجات التى يجب تشغيلها على بعض أو كل هذه المراكز او الماكينات . والمطلوب هو تحديد أمثل تتابع لتعظيم الربح أو تدنية التكاليف أو تحقيق أقل زمن تشغيل أو الارتباط بمواعيد توريد العملاء للسلع المتعاقد عليها . وفى جميع الأحوال يفترض أن زمن تشغيل أى سلعة أو منتج على أى ماكينة معلوم .

والمقصود بالتتابع هو تحديد ترتيب إدخال هذه المنتجات على مجموعة الماكينات .

إذا رمزنا بالرمز (هـ) للماكينات المتاحة هـ = ١ ، ٢ ، ٦ ... ، م

وبالرمز (ن) للسلع والمنتجات المطلوبة

ن = ١ ، ٢ ، ٦ ... ، ن

وتتابع الأعمال يرمز له بالرمز $ن_1$ ، $ن_2$ ، ... ، $ن_ك$ ، ...

حيث يتم أولا تشغيل مجموعة الأعمال $ن_1$ ثم تليها $ن_2$ وهكذا

وأى عملية يرمز لها بالرمز $هـ ن_ر$ وتعنى تشغيل المنتج $ن_ر$ على الماكينة هـ . وزمن التشغيل يرمز له بالرمز $ى م ن_ر$. فإنه لدينا مجموعة ذات $س هـ ن_ر ك = ١$ تعنى أن الجزء $ن_ر$ ترتيبه ك على الماكينة هـ فإذا لم يتحقق ذلك فإن $س هـ ن_ر ك$ = صفر . ويمكن صياغة المسألة كالآتى(*) :

١ — قيود تضمن أن كل سلعة أو منتج يكمل كل العمليات الضرورية لإنتاجه

$$\sum_{ك = ١}^{ك} س_{هـ ن_ر ك} = ١ \qquad هـ = ١ ، ٢ ، ... ، م \qquad (١٠٢)$$

حيث ك تدل على أكبر عدد ممكن من السلع يمكن تشغيله على هـ

٢ — قيود تضمن عدد تخصيص أكثر من سلعة للتشغيل على الماكينة هـ فى الموقع ك

$$\sum_{ن_ر} س_{هـ ن_ر ك} > ١ \qquad ك = ١ ، ٢ ، ... ، ك \qquad (١٠٣)$$

٣ — حساب $ت هـ ن_{ر١}$ = صرهـ = الزمن اللاحق لبدء فترة التتابع عندما يبدأ تشغيل أى سلعة على الماكينة هـ كذلك أحسب زمن بدء عمليات التشغيل $ت هـ ن_ر ك$ من العلاقة :

(*) Wagnnr H. M. « An Integer Linear Programming Model for Machine Scheduling» Nav Res. log. Quart' 6 131-140 (1959)

$$\text{ت}_{\text{هـ ر ك}} = \sum_{\text{ل}=1}^{\text{ك}-1} \sum_{\text{ر}} \text{ر}\ \text{س}_{\text{هـ ر ل}} + \sum_{\text{ل}=\text{صفر}}^{\text{ك}-1} \text{ص}_{\text{هـ ل}} \qquad (١٠٤)$$

حيث $\text{ص}_{\text{هـ ل}}$ = فترة الانتظار (ل) على الماكينة هـ

٤ — قيود ضمان تحقيق المسار الصحيح (ز) بالنسبة للسلعة أو التشغيلة أو الجزء (ر) فى الوضع $\text{ر}_{\text{ع}}$ للماكينة (١) والوضع $\text{ر}_{\text{ع}}$ للماكينة (٢).

$$\text{ت}_{\text{هـ}_1 \text{ر ع}} + \text{ي}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{هـ ر ع}} \leqslant \text{ت}_{\text{هـ}_2 \text{ر ح}} + \text{أ}\left(1 - \text{س}_{\text{هـ}_1 \text{ر ع}}\right)$$
$$+ \text{أ}\left(1 - \text{س}_{\text{هـ}_2 \text{ر ح}}\right) \quad \text{حيث أ رقم صحيح موجب كبير} \qquad (١٠٥)$$

وعلى وجه العموم لكل سلعة ر ولكل زوج من الماكينات (هـ١ ، هـ٢ مثلا) ولكل ترتيب ك = ١ ، ٢ ، ... ، ن لكل ماكينة فإنه يوجد لدينا قيد مثل القيد (١٠٤) . وبالإضافة إلى القيود العددية التى يجب أيضا وضعها)

٥ — أما بالنسبة لدالة الهدف فهى تختلف كما سبق أن ذكرنا طبقا لكل تطبيق . فإذا أخذنا مثلا معيار التأخير فى الوفاء بمواعيد العملاء . فإنه بفرض أن الزمن المحدد للوفاء هو ف(ر) للسلعة ر وأن الزمن الفعلى ى (ر) فإن تدنية ع = $\sum_{\text{ر}}$ ى (ر) — ف (ر) (١٠٦)

يمكن أن تكون دالة الهدف المناسبة فى بعض التطبيقات . ويلاحظ أن الصياغة أوضحت مدى التعقيد الذى نواجهه فى حل هذه المسألة . لذلك فإنه إذا كان عدد الماكينات أثنين أو ثلاثة أمكن الحصول على حلول مثلى باتباع أسلوب

جونسون(*) أما فى الحالة العامة فإن يجب المجوء إلى الطرق التجريبية وأساليب المحاكاة.(**)

(٣—١٠—٤) مسائل المدخلات والمخرجات :

من التطبيقات العبارية الهامة للبرمجة الخطيه مسألة المدخلات والمخرجات وما يتبعها من المسائل الهامة المتعلقة بالتخطيط القومى . ولقد كان أول من أشار إلى امكانية استخدام معاملات تدل على قيمة ما استخدم من كل منتج الإنتاج أى منتج آخر العالم ليونتيف فى دراسته The Structure of American Economy عام ١٩٥١ مستحدثاً جداول المدخلات والمخرجات.

إن التعبير الرياضى عن النظام الاقتصادى المترابط بطريقة خطية يجعل من الممكن تطبيق البرمجة الخطية فى تحديد متغيرات القرار لمتخذ القرار بطريقة كمية.

ويمكن على وجه العموم أن نعتبر النظام الاقتصادى مكونا من عدد ن من القطاعات والتى تنتج عدداً من المنتجات — وسوف نرمز بالرمز سو كمية الانتاج للقطاع و حيث و = ١، ٢، ... ، ن — كما سنرمز اوى المعاملات الإنتاج والتى تحدد ما يستخدم من المنتج ولإنتاج وحده واحده من المنتج س.

(*) S. M. Johnson « optimal tWo and three stage Prodcction Schedules with set - up time Included » Nav Res. log. Quart. VI, No1 1954 PP 61 - 88

(**) Giffler and Thompson « Algorithms fôr Solving production Problems» IBM Reseeatch Repoıt Rc - 118 (1929)

وبذلك فأن الكمية المتبقية للاستهلاك من أى منتج وتساوى ما ينتجه القطاع من هذا المنتج $\text{س}_{\text{و}}$ مطروحا منه كل ما دخل من هذا المنتج فى باقى المنتجات الذى يتحدد بالعلاقة .

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ور}} \, \text{س}_{\text{ر}}$$

أى أن كمية المنتج المتبقية للإستهلاك تعطى بالعلاقة

$$\text{س}_{\text{و}} - \sum \text{ا}_{\text{ور}} \, \text{س}_{\text{ر}} \qquad (١٠٦)$$

فإذا تحدد برنامج الاستهلاك من السلعة و بالكمية $\text{ك}_{\text{و}}$ فمن الواضح أن القيد التالى يجب أن يتحقق

$$\text{س}_{\text{و}} - \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ور}} \, \text{س}_{\text{ر}} = \text{ك}_{\text{و}} \qquad (١٠٧)$$

ويمكن أيضاً إضافة إمكانية استيراد المنتج وبالكمية $\text{ص}_{\text{و}}$ فيصبح القيد (١٠٧)

$$\text{س}_{\text{و}} - \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ور}} \, \text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{و}} = \text{ك}_{\text{و}} \quad .. (١٠٨)$$

ويلاحظ فى الصياغة السابقة أننا اعتبرنا المعاملات $\text{ا}_{\text{ور}}$ وحيدة القيمة — والمعنى الطبيعى لذلك أنه توجد لكل قطاع طريقة تكنولوجية واحده للانتاج .

إلا أنه على وجه العموم يمكن أن نعتبر لكل قطاع (و) مجموعة من الطرق التكنولوجية عددها الكلى $\text{م}_{\text{و}}$ وبذلك يكون لكل طريقة تكنولوجيا (ل) معاملات $\text{ا}_{\text{ور}}(\text{ل})$. وينتج عن استخدام الفن التكنولوجى ل انتاج كمية من

الساعة ومقدارها $س_و$ (ل) - والكمية $س_و$ تحصل عليها بإستخدام كل الطرق التكنولوجيه المتاحة فى القطاع (و) والتى عددها $م_و$ أى أن :

$$\sum_{ل=1}^{م_و} س_و^{(ل)} = س_و$$

بذلك تكون الصورة العامة للقيد (١٠٨) هى :

$$\sum_{ل=1}^{م_و} س_و^{(ل)} - \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{ل=1}^{م_ر} ا_{ور}^{(ل)} س_ر^{(ل)}$$

$$+ ص_و = ك_و \quad ، \quad و = ١، ٢، ...، ن \qquad (١٠٩)$$

وبالإضافة إلى القيد السابق يكون لدينا قيود الطاقة الانتاجية المتاحة لكل قطاع ولمختلف العمليات الإنتاجية $س_و^{(ل)} \leqslant د_و^{(ل)}$ (١١٠)

$$و = ١، ...، ن$$

$$ل = ١، ...، م_و$$

$$س_و^{(ل)} \geqslant صفر$$

إذا جعلنا $ص_و$ متغير غير محدد الإشارة فإننا بذلك نسمح أما باستيراد المنتج و بكمية $ص_و$ عندما يكون $ص_و >$ صفر أو تصدير المنتج عندما $ص_و <$ صفر.

إن البحث عن داله هدف لنظام ليونتيف سوف نناقشه تفصيلا فى الباب الخاص بتحليل المدخلات المخرجات لكننا سوف نعتبر فى هذا الجزء داله هدف تقليدية.

إذ اعتبرنا أن $ح_و^{(ل)}$ هو ربح انتاج القطاع (و) من إنتاج الوحدة من $س_و^{(ل)}$ بالطريقة الانتاجية (ل) وأن سعر البيع العالمى (سواء بالتصدير الاستيراد) للسلعة و هو $ث_و$ فإن المطلوب : —

تعظيم :

$$\left.\begin{aligned} ع &= \sum_{و=1}^{ن} \sum_{ل=1}^{م_و} ح_و^{(ل)} س_و^{(ل)} - \sum_{و=1}^{ن} ث_و (ص'_و - ص''_و) \quad \text{مستوفيا} \\ & \sum_{ل=1}^{م_و} س_و^{(ل)} - \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{ل=1}^{م_ر} أ_{ور}^{(ل)} س_ر^{(ل)} + (ص'_و - ص''_و) = ك_و \end{aligned}\right\} (111)$$

$$ق_و^{(ل)} \geqslant س_و^{(ل)} \geqslant \text{صفر}$$

$$ص'_و ، ص''_و \geqslant \text{صفر}$$

وإذا أعتبرنا على سبيل المثال نظـــام اقتصادى مكون من ثلاثة قطاعات وطريقتين تكنولوجيتين بالعلاقات التالية :

$$[أ_{ور}]^{(1)} = \begin{bmatrix} ٫١٠ & ٫٣٠ & ٫٣٠ \\ ٫٤٠ & ٫١٠ & ٫٢٠ \\ ٫٣٠ & ٫٢٥ & ٫١٥ \end{bmatrix} ،$$

$$[أ_{ور}]^{(2)} = \begin{bmatrix} ٫٠٥ & ٫٣٥ & ٫٢٠ \\ ٫٤ & ٫٢٠ & ٫١٠ \\ ٫١٠ & ٫٥٠ & ٫١٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{ك}_{\text{و}} = \begin{bmatrix} \text{١٢٥} \\ \text{٧٥} \\ \text{١٦٠} \end{bmatrix} ، \quad \text{ق}_{\text{ح}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \text{٤٥٠} \\ \text{٣٥٠} \\ \text{٦٠٠} \end{bmatrix} ،$$

$$\text{ق}_{\text{و}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \text{٣٠٠} \\ \text{٥٠٠} \\ \text{٥٠٠} \end{bmatrix}$$

$$\text{ث}_{\text{و}} = \begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{٤} \\ \text{٧} \end{bmatrix} ، \quad \text{ح}_{\text{و}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \text{و٧} \\ \text{١} \\ \text{و٩} \end{bmatrix} ،$$

$$\text{ح}_{\text{و}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{و٦} \\ \text{و٨} \end{bmatrix}$$

يكون برنامج النظام الاقتصادى هو :

تعظيم :

$$\text{ج} = ٧\,\text{وس}_{١}^{(١)} + \text{س}_{٢}^{(١)} + ٩\,\text{وس}_{٢}^{(١)} + ١\,\text{س}_{١}^{(٢)} + ٦\,\text{وس}_{٢}^{(٢)}$$
$$+ ٨\,\text{وص}_{٢}^{(٢)} - [\,٥(\text{ص}'_{١} - \text{ص}''_{١}) + ٤(\text{ص}'_{٢} - \text{ص}''_{٢})$$
$$+ ٧(\text{ص}'_{٣} - \text{ص}''_{٣})\,] + \underset{\text{مستوفيا}}{\text{ك}}(\text{سه}_{١} + \text{سه}_{٢}$$
$$+ \text{سه}_{٢})$$

$$\text{ص}_{١}^{(١)} + \text{س}_{١}^{(٢)} - ١\,\text{وس}_{١}^{(١)} - ٢\,\text{وس}_{٢}^{(١)} - ٠٫٥\,\text{وس}_{١}^{(٢)} - ٢٫٣٥\,\text{ش}_{٢}^{(٢)}$$
$$- ٢\,\text{وس}_{٣}^{(٢)} + \text{ص}'_{١} - \text{ص}''_{١} + \text{سه}_{١} = ١٢٥$$

$$\text{ص}_{٢}^{(١)} + \text{س}_{٢}^{(٢)} - ٤\,\text{وس}_{١}^{(١)} - ١\,\text{وس}_{٢}^{(١)} - ٢\,\text{وس}_{٣}^{(١)} - ٢\,\text{وس}_{٢}^{(١)}$$
$$- ٤\,\text{وص}_{١}^{(٢)} - ٢\,\text{وس}_{٢}^{(٢)} - ١\,\text{وس}_{٣}^{(٢)} + \text{ص}'_{٢} - \text{ص}''_{٢} + \text{سه}_{٢}$$
$$= ٧٥$$

$$\text{ص}_{٣}^{(١)} + \text{س}_{٣}^{(٢)} - ٢\,\text{وس}_{١}^{(١)} - ٢٥\,\text{وس}_{٢}^{(١)} - ١٥\,\text{وس}_{٣}^{(١)} -$$
$$- ٥\,\text{وس}_{٢}^{(٢)} - ١\,\text{وس}_{٣}^{(٢)} + \text{ص}'_{٣} - \text{ص}''_{٣} + \text{سه}_{٢} = ١٦٠$$

$$\text{ص}_{١}^{(١)} + \text{س}_{٤} = ٤٥٠$$
$$\text{ص}_{٢}^{(١)} + \text{س}_{٥} = ٣٥٠$$
$$\text{ص}_{٣}^{(١)} + \text{س}_{٦} = ٦٠٠$$
$$\text{ص}_{١}^{(٢)} + \text{س}_{٧} = ٣٠٠$$
$$\text{ص}_{٢}^{(٢)} + \text{س}_{٨} = ٥٠٠$$
$$\text{ص}_{٣}^{(٢)} + \text{س}_{٩} = ٥٠٠$$

$$\text{مر}_{\text{و}}^{(\text{ل})} ،\ \text{س}_{\text{و+ل}} ،\ \text{ص}'_{\text{و}} ،\ \text{ص}''_{\text{و}} ،\ \text{سه}_{\text{و}} \geqslant \text{صفر}$$
$$\text{و} = ١ ، ٢ ، ٣$$
$$\text{ل} = ١ ، ٢$$

(٣ — ١١) البرمجه الخطيه الديناميكيه*

أحد الامتدادات الرئيسيه(**) لمسألة البرمجه الخطيه والتى وجدت اهتماماً كبيرا منذ البدايه هى تضمن مسألة "برمجه الخطيه عنصر الزمن — ومعنى ذلك أن مسألة البرمجه الخطيه الديناميكيه هى أساسا امتداد مسألة البرمجه الخطية الساكنة (فترة واحده) لعدة فترات زمنيه — وتتميز هذه المسألة بالخصائص التالية :

(i) مجموعة من القيود التى تتكرر من فترة إلى أخرى . بذلك فإن بعض المعاملات لا تتغير .

(ii) مصفوفة المعاملات تحتوى على عدد كبيراً من الأصفار (مصفوفة فارغة) وبذلك تكون عدد المعاملات الغير صفرية قليل .

وقد أوليت عناية خاصة للأنشطة التى تكون الأنشطة فى زمن معين تعتمد

(*) إعتمدنا فى كتابتنا لهذا الجزء على المصادر التالية :

(1) Russel L. Ackoff « Publications in operations Research №5 » chapter 4 Mathematical Programming by ARNOFF & SENGUPTA John Wiley & Sons INC. 1961 .

(2) G B. DANTZIG « On The Status of Multi-Stage Linear Programming Problem » Management science Vo6 № 1 October 1959

(3) DANTZIG AND WOIF «Decômposition Theorems for Linear Progrms » Jr Operations Res Vol 8 №1 1960 PP 101 – 111

(**) يمكن إهمال هذا الجزء فى القراءة الأولى :

على الأنشطة فى نفس الفترة الزمنية والفترات السابقة لها بحيث يمكن تمثيل النظام كما يلى :

تدنيه :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{ع} = \text{حـ}^{(1)} \text{س}_1 + \text{حـ}^{(2)} \text{س}_2 + \cdots + \text{حـ}^{(\text{ن})} \text{س}_{\text{ن}} \\
\text{ا}_{11} \text{س}_1 = \text{ب}^{(1)} \\
\text{ا}_{21} \text{س}_1 + \text{ا}_{22} \text{س}_2 = \text{ب}^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{ا}_{\text{ن}1} \text{س}_1 + \text{ا}_{\text{ن}2} \text{س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{نن}} \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}^{(\text{ن})} \\
\text{س}^{(1)} ، \cdots ، \text{س}^{(2)} \geq \text{صفر}
\end{array}
\right. \qquad (112)
$$

حيث [$\text{ا}_{\text{و ر}}$] مصفوفات جزئية (أو قوالب) للمصفوفة الكلية الأصلية للنظام س(١) متجة الأنشطة للفترة الأولى ، س(٢) متجه الأنشطة للفترة الثانية وهكذا ب(١) ، ب(٢) ، ... ب(ن) متجهات القيود ، حـ(١) ، ... ، حـ(ن) متجهات التكاليف .

أن حل المسألة (١١٢) بالطرق العادية للسمبلكس سوف يتطلب الحصول على مقلوب المصفوفة الكلية ويتضمن فى كل مرحلة إجراء العديد من العمليات الحسابية والتقريبات التى عند حل مسائل بدرجـــة كبيرة من التفصيل تستنفذ أوقاتا وجهوداً كبيراً على الحاسبات الآلية . لهذا السبب فإن كثير من البحث قد خصص لهذا النوع من المسائل فى سبيل الحصول على طرق أفضل الحل .

ومنذ البداية كان السؤال هل يمكن الربط بين المسألة الكلية (١١٢) والمسائل

الجزئية المكونة من قيود المصفوفات الجزئية. وأحد الحلول التى اقترحها دانتزج تتلخص فيما يلى: (إفترضنا فيما يلى نظاما « أربع فترات »)

١ — أفترض أن [اهـ] هى الأساسية التى نحصل عليها من [ا] بحيث أن اهـ يمكن تجزئتها مثل [ا] كما يلى:

$$[\text{اهـ}] = \begin{bmatrix} \text{اهـ}_{11} & & & \\ \text{اهـ}_{12} & \text{اهـ}_{22} & & \\ \text{اهـ}_{13} & \text{اهـ}_{23} & \text{اهـ}_{33} & \\ \text{اهـ}_{14} & \text{اهـ}_{24} & \text{اهـ}_{34} & \text{اهـ}_{44} \end{bmatrix}$$

(١١٣)

$$\text{حـهـ} = [\text{حـ}_1\text{هـ} \quad \text{حـ}_2\text{هـ} \quad \text{حـ}_3\text{هـ} \quad \text{حـ}_4\text{هـ}]$$

حيث حـو هـ معاملات حـو فى الأساسية . ويلاحظ أن المصفوفات اووهـ مصفوفات مربعة بحيث أنه يتوفر شرط وجود مقلوب لها . ولحل المسألة الكلية فإن كل ما يلزمنا الحصول على مقلوب المصفوفات الجزئية اووهـ .

٢ — تعتمد طريقة الحل على مجموعة من المسائل الجزئية الصغرى ، مسألة واحدة فى كل مرحلة .

وتبدأ الطريقة بتحديد مجموعة الأنشطة المرحلة الأخيرة (دون تحديد مستوى هذه الأنشطة) . ثم تحديد مجموعة الأنشطة للمرحلة قبل الأخيرة وهكذا (وفى كل مرحلة لا يتم تحديد مستوى الأنشطة) وذلك حتى يتم تحديد إختيار مجموعة الأنشطة للمرحلة الأولى .

٣ — بمعرفة جميع أعمدة الأساسية للمرحلة الأولى ($ا_{١١}$ هـ*) يمكن حساب مستوى الأنشطة للمرحلة الأولى ثم تستخدم فى المرحلة الثانية • وهكذا .

وفى الحالة قيد البحث نبدأ بالمرحلة الأخيرة ونحسب :

$$ص_٤ = ح_٤^{هـ} [ا_{٤٤}^{هـ}]^{-١} \quad (١١٤)$$

فإذا كانت جميع عناصر المتجه :

$$ح^{(٤)} - ص_٤ \, ا_{٤٤} \geqslant صفر$$

فإن الأساسية المصاحبة لأنشطة المرحلة الأخيرة تكون إختياراً أمثل ، فإذا لم يتوفر ذلك يتم إدخال العمود الذى له أكبر قيمة سالبة ليحل محل عامود فى الأساسية له معاملات موجبة بنفس طريقة السمبلكس العادية ويستمر العمل حتى يتحقق الشرط(١١٥) وهذه المجموعة من المتغيرات عند تحديد إختيارها لا تترك الأساسية مطلقا فيما بعد •

٤ — يتم تكرار ما سبق وذلك للمرحلة الثالثة وذلك باستخدام التكلفة الجديدة $ح^{-(٣)}$ لتحل محل $ح^{(٣)}$ الأصلية بالعلاقة التالية :

$$ح^{-(٣)} = ح^{(٣)} - ص_٤ \, ا_{٣٤} \quad (١١٦)$$

وبالتالى يمكن حساب $ص_٣$ من العلاقة :

$$ص_٣ = ح^{-}_٣{}^{هـ} [ا_{٣٣}^{هـ}]^{-١} \quad (١١٧)$$

حيث $ح^{-}_٣{}^{هـ}$ التكلفة المصاحبة لأعمدة الأساسية . وينتهى الحل فى هــذه المرحلة عندما يتوفر الشرط .

$$ح^{-(٣)} - ص_٣ [ا_{٣٣}] \geqslant صفر \quad (١١٨)$$

نكرر ماسبق حتى المرحلة الأولى . ونلاحظ أننا بذلك اختزلنا المسألة (١١٢) إلى مجموعة من المسائل ، الصغرى لتوضيح المفاهيم السابقة سوف ندرس مسألة المستودعات (التخزين) وهى مسألة ذات طبيعة ديناميكية ويمكن وصفها كما يلي : اعتبر سلعة موسمية (القطن مثلا) يتم تخزينها فى مستودعات كبيرة ويمكن شراءها وبيعها . ولأى فترة (و) يكون لدينا :

$ح_و$ = تكلفة الوحدة

$ح'_و = ح_و + ت_و$

$ث_و$ = سعر البيع

$ت_و$ = تكلفة تخزين الوحدة

$س_و$ = الكمية المباعة

$ش_و$ = الكمية المشتراة

$ق_و$ = مستوى التخزين بعد البيع

$ف_و$ = الطاقة الغير مستعملة للمستودع

$أ$ = الطاقة الكلية المستودع

$م$ = المخزون الإبتدائى

والقيود عبارة عن عدم تعدى الطاقة الكلية المخزون $أ$ ، وعدم السماح بمخزون سالب . ودالة الهدف هى التكلفة الكلية للمخزون .

وبذلك يمكن صياغة المسألة كما يلي :

تدنيه :

$$ع = -ث_{١}س_{١} + ت_{١}ق_{١} + حَ_{١}ش_{١} - ت_{٢}س_{٢} + ت_{٢}ف_{٢} + حَ_{٢}ش_{٢} -$$

$$ث_{٣}س_{٣} + ت_{٣}ق_{٣} + حَ_{٣}ش_{٣} - ث_{٤}س_{٤} + ت_{٤}ق_{٤} + حَ_{٤}ش_{٤}$$

مستوفيا

$$- س_{١} - ق_{١} = ١$$

$$ف_{١} + ق_{١} + ش_{١} = -م$$

$$ق_{١} + ش_{١} - س_{٢} - ق_{٢} = \text{صفر}$$

$$ف_{٢} + ق_{٢} + ش_{٢} = ١$$

$$ق_{٢} + ش_{٢} - س_{٣} - ق_{٣} = \text{صفر}$$

$$ف_{٣} + ق_{٣} + ش_{٣} = ١$$

$$ق_{٣} + ش_{٣} - س_{٤} - ق_{٤} = \text{صفر}$$

(١١٩)

وباستخدام القواعد المشروحة سابقا يكون الحل مباشراً على النحو التالى :

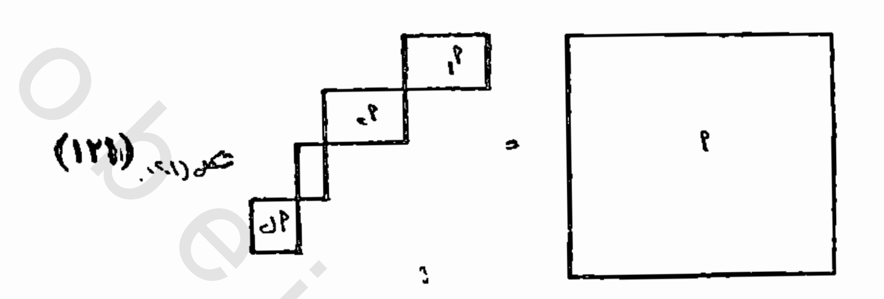
الحساب	القرار
١ — ص$_{٤}$ = أقل (— ث$_{٤}$ ، ت و)	البيع إذا كان الحد الأول أقل
٢ — $\bar{ص}_{٣}$ = أقل (صفر ، $\bar{ج}_{٣}$ + ص$_{٤}$)	الشراء إذا كان الحد الثاني أقل
٣ — ص$_{٣}$ = أقل (— ث$_{٣}$ + $\bar{ص}_{٣}$ ، ت$_{٣}$ + ص$_{٤}$)	البيع إذا كان الحد الأول أقل
٤ — $\bar{ص}_{٢}$ = أقل ($\bar{ص}_{٣}$ ، $\bar{ج}_{٢}$ + $\bar{ص}_{٣}$)	الشراء إذا كان الحد الثاني أقل
٥ — ص$_{٢}$ = أقل (— ث$_{٢}$ + $\bar{ص}_{٢}$ ، ت$_{٢}$ + $\bar{ص}_{٣}$)	البيع إذا كان الحد الأول أقل
٦ — $\bar{ص}_{١}$ = أقل ($\bar{ص}_{٢}$ ، $\bar{ج}_{١}$ + ص$_{٢}$)	الشراء إذا كان الحد الثاني أقل
٧ — ص$_{١}$ = أقل (— ث$_{١}$ + $\bar{ص}_{١}$ ، ت$_{١}$ + ص$_{٢}$)	البيع إذا كان الحد الأول أقل

(١٢٠)

وبمعرفة المتغيرات في الحل في المرحلة الأولى يتم التعويض في قيود المرحلة الأولى لنحصل على مستوى (قيمة) المتغيرات وبمعرفة قيمة متغيرات المرحلة الأولى والمتغيرات الداخلة في الحل في المرحلة الثانية يتم تحديد قيمة متغيرات المرحلة الثانية بالتعويض في قيود المرحلة الثانية وهكذا .

ولا شك أن الطريقة السابقة أسهل بكثير من استخدام السمبلكس لحل المسألة الكلية الأصلية .

واحد النظريات الهامة فى مسألة البرمجة الخطية هى مبدأ لتحليل Decomposition Principle، وهى تتعلق ببعض المسائل ذات الطبيعة الخاصة والتى يمكن فيها تبسيط النظام الاصلى بتجزئة مصفوفة المعاملات إلى مجموعة من المصفوفات الجزئية . فإذا كانت المصفوفات الجزئية للمصفوفة الكلية تترتب وتريا .



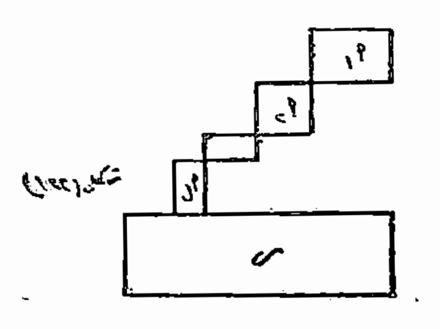
شكل (١٢١)

سمى النظام بأنه كامل التحلل Completely Decomxposable

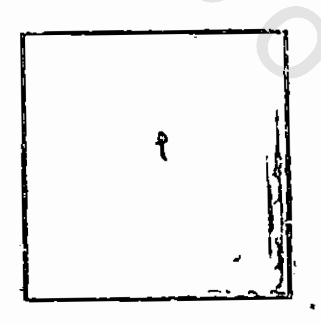
وفى هذه الحالة يكون الحل الامثل للنظام يتأتى بحل الانظمة (ل) المكونة للنظام الأصلى كل على حدة ويكون الحل الأمثل س° = ($س_1^{\circ}$ ، $س_2^{\circ}$ ، ... ، $س_ل^{\circ}$) مكونا من الحلول المثلى للمسائل الجزئية .

ويسمى النظام بأنه تحليلى فقط Decmposable

إذا أمكن تجزئة مصفوفته إلى الشكل السابق بالإضافة إلى مصفوفة رابطة لا يمكن تجزئتها على النحو التالى :



شكل (١٢٢)



والذى يهمنا هنا كيفية حل هذا النظام الذى له أهمية كبرى فى التطبيقات الصناعية والاقتصادية . فعلى سبيل المثال إذا كان النشاط الإنتاجى بشركة يتكون من مجموعة من المصانع أو العمليات الإنتاجية التى عددها (ل) فإن المعاملات الفنية المتعلقة بالعملية الإنتاجية (و) يمكن النظر إليها على أنها تمثل المصفوفة [او] بينما تشكل المصفوفة الكلية من القيود الرابطة الكلية التى تحدد العلاقة بين منتجات الشركة أو عمليات التحويل أو ما شابه ذلك .

وبنفس الطريقة يمكن النظر إلى النظام الاقتصادى الكلى المكون من (ل) من القطاعات المنتجة حيث تحدد او بمصفوفة معاملات الإنتاج للقطاع . بينما تحدد م العلاقة بين القطاعات .

وتفيد الطريقة التى توصل إليها (دانتزج وراوف) لحل هذا النوع من الأنظمة وتعتمد على حل المسألة كما يلى :

(ا) برامج خطية جزئية للأنظمة الجزئية أنها مستقلة تماماً (كاملة التحليل)

(ب) برنامج رئيسى لربط البرامج الجزئية

إن المسألة قيد البحث هى : تدنيه :

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{ع} = \text{ج}^{(1)}\,\text{س}^{(1)} + \text{ج}^{(2)}\,\text{س}^{(2)} + \cdots + \text{ج}^{(\text{ل})}\,\text{س}^{(\text{ل})} \\
\text{مستوفيا} \\
\text{ا}_1\,\text{س}^{(1)} = \text{ب}_1 \\
\text{ا}_2\,\text{س}^{(2)} = \text{ب}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{ال}\,\text{س}^{(\text{ل})} = \text{ب}_{\text{ل}} \\
\text{م}_1\,\text{س}^{(1)} + \text{م}_2\,\text{س}^{(2)} + \cdots + \text{م}_{\text{ل}}\,\text{س}^{(\text{ل})} = \text{ب}_{\text{م}}
\end{array}
\right\} \quad (١٢٣)
$$

ولعله يكون من الأفضل قصر المناقشة على حالة نظام مكون من نظامين جزئيين ثم تعميم النتائج أى أن الحالة قيد الدراسة هى :

تدنيه :

$$\text{ع} = \text{ج}^{(1)}\,\text{س}^{(1)} + \text{ج}^{(2)}\,\text{س}^{(2)}$$

مستوفيا

$$\text{أ}_1\,\text{س}^{(1)} = \text{ب}_1 \quad ،$$
$$\text{أ}_2\,\text{س}^{(2)} = \text{ب}_2 \quad ،$$
$$\text{م}_1\,\text{س}^{(1)} + \text{م}_2\,\text{س}^{(2)} = \text{ب}_{\text{م}}$$

إذا كان $\text{س}_{\text{و}}^{(1)}$ ، و = ١ ، ك هى مجموعة الحلول العملية الأساسية المسألة الجزئية ق_1

$$\text{ق}_1 \equiv \text{أ}_1\,\text{س}^{(1)} = \text{ب}_1$$

فإن أى حل :

$$\text{س}^{(1)} = \text{مجـ}_{\text{و}}\ \lambda_{\text{و}}^{(1)}\ \text{س}_{\text{و}}^{(1)} \qquad (١٢٤)$$
$$\text{مجـ}_{\text{و}}\ \lambda_{\text{و}}^{(1)} = 1 \quad ، \quad \lambda_{\text{و}} \geqslant \text{صفر}$$

كذلك إذا كان $\text{س}_{\text{ر}}^{(2)}$ ، ر = ١ ، ... ، ف هى مجموعة الحلول العملية الأساسية للمسألة الجزئية ق_2

$$\text{ق}_2 \equiv \text{أ}_2\,\text{س}^{(2)} = \text{ب}_2$$

فإن أى حل :

$$\text{س}^{(2)} = \text{مجـ}_{\text{ر}}\ \lambda_{\text{ر}}^{(2)}\ \text{س}_{\text{ر}}^{(2)} \qquad (١٢٥)$$
$$\text{مجـ}\ \lambda_{\text{ر}}^{(2)} = 1 \quad \lambda_{\text{ر}}^{(2)} \geqslant \text{صفر}$$

وبالتالى فإن أى حل للمسألة (١٢٣) يمكن أن يعبر عنه بدلالة $\lambda_{و}^{(1)}$ ، $\lambda^{(2)}$ كما يلى :

تدنيه :

$$(126)\begin{cases} ج^{(1)} س^{(1)} + ج^{(2)} س^{(2)} \\ \text{مستوفيا} \\ \sum_{و} \lambda_{و}^{(1)} (ر_1 س_{و}^{(1)}) + \sum_{ر} \lambda_{ر}^{(2)} (ر_2 س_{ر}^{(2)}) = ب_ر \\ \sum_{و} \lambda_{و}^{(1)} = 1 \\ \sum_{ر} \lambda_{ر}^{(2)} = 1 \end{cases}$$

وباجراء التحويل $\bar{س}_1 = ر_1 س^{(1)}$ ، $\bar{س}_2 = ر_2 س^{(2)}$ تؤول (١٢٦) :

تدنيه :

$$(127)\begin{cases} \bar{ج}_1 \lambda^{(1)} + \bar{ج}_2 \lambda^{(2)} \\ \text{مستوفيا} \\ \sum \lambda_{و}^{(1)} \bar{س}_1 + \sum \lambda_{ر}^{(2)} \bar{س}_2 = ب_ر \\ \sum \lambda_{و}^{(1)} = 1 \\ \sum \lambda_{ر}^{(2)} = 1 \\ \lambda_{و}^{(1)} ، \lambda_{ر}^{(2)} \geqslant \text{صفر} \end{cases}$$

$\bar{ح}_1$ ، $\bar{ح}_2$ متجهين يحتويان على ل ، ف من العناصر التى كل منها يذتج من $ح^{(1)} س^{(1)}$ ، $ح^{(2)} س_{ر}^{(2)}$

إفترض أننا توصلنا إلى حل إبتدائى بقيم إبتدائية $\lambda_{و}^{(1)}$ ، $\lambda_{ر}^{(2)}$ للمسألة (١٢٧) فإنه بمعرفة :

$س_{و}^{(1)}$ ، $س_{ر}^{(2)}$ يمكن حساب $س_{ب}^{(1)}$ ، $س_{ب}^{(2)}$ من

$$س_{ب}^{(1)} = مج \lambda_{و} س_{و}^{(1)} ، س^{(2)} = مج \lambda_{ر} س_{ر}^{(2)}$$

ولتحسين الحل الإبتدائى أو إختبار المثلية نحسب قيم $ص_{ب}^{(1)}$ ، $ص_{ب}^{(2)}$ لتحديد قيمة المقدار :

$$ع_{ط} - ج_{ط} \qquad (١٢٨)$$

$$ص_{ب}^{(1)} ه^{(1)} - ح_{ط} ، ص_{ب}^{(2)} ه^{(2)} - ح_{ط}$$

حيث $ص_{ب}^{(1)}$ ، $ص_{ب}^{(2)}$ القيمات المصاحبة للحل الأساسى ، $ح_{ه}$ التكلفة المصاحبة للمتغيرات الداخلة فى الحل ، $ح_{ط}$ تكلفة المتغيرات الغير داخلة فى الحل ٠

فإذا كان المقدار (١٢٨) سالب أمكن تحسين الحل أما إذا كان غير سالب لا يمكن تحسين الحل ، لذلك فإنه للحصول على $ص_{ب}^{(1)}$ ، $ص_{ب}^{(2)}$ أقل ما يمكن يتم حل البرامج المساعدة التالية :

(I) تدنية :

$$\left.\begin{array}{l} ع^{(1)} = ك_{ب}^{(1)} س^{(1)} \\ \text{مستوفيا} \\ أ_{1} س^{(1)} = ب_{1} \\ س^{(1)} \geqslant \text{صفر} \\ \text{حيث } ك_{ب}^{(1)} = ص_{ب}^{(1)} ه = م_{1} \end{array}\right\} \qquad (١٢٩)$$

(II) تدنيه :

$$\left.\begin{array}{l} ع^{(٢)} = ط^{(٢)} س^{(٢)} \\ \text{مستوفيا} \\ أ_٢ س^{(٢)} = ب_٢ \\ س^{(٢)} \geqslant \text{صفر} \end{array}\right\} \quad (١٣٠)$$

فإذ نتج عن حل (١٢٩) أو (١٣٠) تحقيق ع‌ط — جط > صفر فإننا ندخل هذا المتجة فى الأساسية . ونحل البرنامج الرئيسى (١٢٧) لتحديد قيم $\lambda^{(٢)}$ ، $\lambda^{(٢)}$ الجديدة وهكذا حتى تكون جميع ع‌ط — حط $\geqslant$ صفر فيكون الحل أمثل ونحصل على قيم س$^{(١)}$ ، س$^{(٢)}$ بإستخدام آخر قيم لـ $\lambda^{(١)}$ ، $\lambda^{(٢)}$ بالتعويض فى (١٢٤) .

٤ ـ نماذج النقل

٤ ـ ١ تقديم :

بدأت معالجة مسألة النقل منذ فترة طويلة لسهولتها النسبية بإعتبارها حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية . وأولى هذه الدراسات تمت فى عام ١٩٤١ بواسطة ف . هيتشكوك* ثم تلتها دراسة أخرى عام ١٩٤٧ بواسطة ت . كوبمانز**

وتنطبق على مسالة النقل جميع الافتراضات المتعلقة بمسالة البرمجة الخطية من حيث توافر الخطية فى كل من دالة الهدف والقيود . ويمكن تلخيص مسالة النقل المعيارية كما يلى :

لدينا مجموعة من المصادر التى يتوفر لديها كميات معينة (سلع) كما يوجد مجموعة أخرى من المراكز الغايات التى توزع عليها هذه الكميات حيث يطلب (أو يستوعب) كل مركز من هذه المراكز كمية محدده يجب استيفاءها . ويصاحب نقل وحده الكمية من أى مصدر إلى أى غاية تكلفة معلومة تسمى بتكلفة النقل . والمطلوب هنا تحديد برنامج النقل الأمثل الذى تكون تكلفة

(*) Hitchcokc « The Distributton of a Product from Several Sources to Neumerous Locations » Jr. Math. & Phy. № 20, 1941 PP 224 – 230 .

(**) Koupmans « optimal utilization of the transportation system » Proceeding of International conference of statistics, 1947.

أدنى ما يمكن والذى يحقق نقل الكميات من مصادرها إلى غاياتها . ويمكن بذلك تصوير مسالة النقل فى الجدول (١) التالى :

المصادر (الأصول)		غ١	غ٢	- - - -	غر	- - -	غن	الكميات المتاحة
		الغايات (المراكز)						
	س١	ح١١ / س١١	ح١٢ / س١٢		ح١ر / س١ر		ح١ن / س١ن	ا١
	س٢	ح٢١ / س٢١	ح٢٢ / س٢٢		ح٢ر / س٢ر		ح٢ن / س٢ن	ا٢
	سو	حو١ / سو١	حو٢ / سو٢		حور / سور		حون / سون	او
	سم	حم١ / سم١	حم٢ / سم٢		حمر / سمر		حمن / سمن	ام
الكميات المطلوبة		ب١	ب٢				بن	ك / ك

جدول (١)

ويوضح الجدول المصادر س١ ، س٢ ، ... ، سم والكميات المتاحة عند هذه المصادر (ا١ ، ا٢ ، ... ، ام) . كما يبين الغايات غ١ ، غ٢ ، ... ، غن والكميات المطلوبة أو التى تستوعبها هذه المراكز وهى ب١ ، ب٢ ، ... ، بن . ويحتوى الجدول على تكلفة النقل من أى مصدر سو إلى أى غاية غر فى ركن الخلية بالجدول والتى تعطى بالتكلفة (حور) . والكمية المقبولة تساوى ك أى مجموع الكميات المتاحة عند المصادر أو مجموع الكميات التى

مستودعها (تحتاج إليها) الغايات . والمطلوب تحديد الكميات $س_{و ر}$ التي تمثل الكمية المنقولة من المصدر (و) إلى الغاية (ر) (برنامج النقل) بحيث تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن . ويمكن صياغة المسألة كما يلي :

١ — قيود الكميات المتاحة عند المصادر :

أي برنامج نقل يجب أن ينقل كل الكميات المتاحة عند كل مصدر ، أي أن مجموع الكميات المنقولة من هذا المصدر إلى الغايات المختلفة يجب أن تساوي الكمية المتاحة عند هذا المصدر . أي أن لأي مصدر (و) يكون :

$$س_{و١} + س_{و٢} + \cdots + س_{و ر} + س_{و ن} = ا_و$$

أو :

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_{و ر} = ا_و \qquad (١)$$

$$و = ١ ، \cdots ، م$$

٢ — قيود الكميات المطلوبة عند الغايات :

أي برنامج نقل يجب أن يوفر الكميات المطلوبة لأي غاية ، أي أن مجموع الكميات المنقولة من المصادر المختلفة لأي غاية ر يجب أن يساوي الكمية المطلوبة عند هذه الغاية .

$$\left.\begin{array}{l} س_{١ر} + س_{٢ر} + \cdots + س_{ور} + \cdots + \\ س_{مر} = ب_{ر} \quad \text{أو :} \\ \sum_{و=١}^{م} س_{ور} = ب_{ر} \\ ر = ١ ، \cdots ، ن \end{array}\right\} \quad (٢)$$

٣ — تساوى الكميات الكلية المطلوبة والمتاحة :

مجموع الكميات الكلية المنقولة ك تساوى مجموع الكميات المتاحة عند الأصول كما تساوى مجموع الكميات المطلوبة عند الغايات

$$\sum_{ر=١}^{ن} ب_{ر} = \sum_{و=١}^{م} ا_{و} = ك \quad (٣)$$

٤ — دالة الهدف :

المطلوب هو تدنية التكلفة الكلية للنقل . أى أن مجموع حاصل ضرب تكلفة نقل الوحدة ح‌ور مضروبه فى الكمية س‌ور لجميع قيم و ، ر يجب أن يكون أقل ما يمكن .

$$ع = \sum_{ر=١}^{ن} \sum_{و=١}^{م} ح_{ور} س_{ور} \quad (٤)$$

وبالتالى يكون نموذج النقل هو :

تدنيه :

$$\text{ع} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ور}} \qquad \text{مستوفيا}$$

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{أ}_{\text{و}}$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{ب}_{\text{ر}} \qquad (٥)$$

$$\sum \text{أ}_{\text{و}} = \sum \text{ب}_{\text{ر}}$$

$$\text{س}_{\text{ور}} \geq \text{صفر}$$

ويتضح من الصياغة السابقة ما يلى :

١ — جميع القيود تظهر على شكل معادلات ومتساويات (المعادلات ١ ، ٢)

٢ — جميع المعاملات للمتغيرات هى الواحد الصحيح (المعادلات ١ ، ٢)

٣ — أن هناك ارتباط بين المتطلبات والإمكانيات . فإذا لاحظنا أن عدد القيود = م + ن . وأن المعادلة (٣) تعنى وجود ارتباط خطى بين (١) ، (٢) فإن عـــدد المعادلات المستقلة يكون مساويا (م + ن — ١) وبالتالى فإن أى حل أساس المسألة (٥) يجب أن يحتوى على عدد من المتغيرات = م + ن — ١

(٤ — ٢) حل مسألة النقل بطريقة القيم :

تقسم كل طرق الحل الخاصة بمسألة النقل الى ثلاثة مراحل :

(ا) الحصول على حل إبتدائى أو (أولى) .

(ب) تحسين الحل الإبتدائى تكراريا للوصول إلى الحل الأمثل (الحل النهائى).

(ﺣ) إختبار المثالية

وفى هــذا البند سوف نذكر طريقة التعميم بواسطة الأحجار المتنقلة Stepping Stone أو المسارات الموجهة Directed Paths ومن الأفضل ان نشرح هذه الطريقة بواسطة المثال الموضح فى جدول (٢) التالى :

		العـــابات					الكميات المتاحة
		غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
المصادر	ص١	٢	٢,٥	٢	٣	١,٥	٢٠
	ص٢	٣	١,٥	١,٠	٢	٣	١٥٠
	ص٣	٢	٣	٢	١	١,٥	٢٥٠
	ص٤	٢,٥	٢	٢	٤	٢	١٠٠
الكميات المطلوبة		١٧٠	١٦٠	١٤	١٢	١١٠	٧٠٠ / ٧٠

جدول (٢)

يبين الجدول (٢) مسألة نقل لنقل المنتج من أربعة مصادر أو اصول (هى مصانع لإنتاج هذا المنتج) إلى خمسة غايات (هى مراكز توزيع هــذا المنتج) ويبين الجدول الكميات المتاحة والمطلوبة وتكلفة النقل والمطلوب تحديد أفضل برنامج للنقل .

الخطوة الأولى :

الحصول على حل إبتدائى نستخدم طريقة (الركن الشمالى الشرقى) وتتلخص فيما يلى :

قارن الكمية المطلوبة بالكمية المتاحة فى أول خانة علوية للجدول (الركن الشمالى الشرقى) . أى نقارن الكمية المطلوبة عند $غ_1$ بالكميه المتاحة عند $ص_1$ ونضع فى هذه الخانة أقل الكميتين [١٧٠ = أقل (١٧٠ ، ٢٠٠)] ونظراً لعدم استنفاذ الكمية المتاحة عند $ص_1$ وهى ٢٠٠ ننتقل إلى خانة تالية على نفس الصف وهى الخانة ($ص_1 غ_2$) ونقارن الكمية المتاحة وهى الكمية المتبقية بعد تخصيص ١٧٠ فى الخانة $ص_1 غ_1$ أى ٢٠٠ — ١٧٠ = ٣٠ بالكمية المطلوبة عند $غ_2$ وهى ١٦٠ ونضع فى هذه الخانة أقل الكميتين أى أقل (١٦٠ ، ٣٠) = ٣٠ وبذلك نكون قد استنفذنا كل الكمية المتاحة عند $ص_1$ بينما الاحتياجات عند $غ_2$ لم نوف فيها سوى ٣٠ وحدة لذلك ننتقل أسفل $غ_2$ فى الخلية التالية ونقارن بين الكمية المتبقية عند $غ_2$ وهى ١٦٠ — ٣٠ = ١٣٠ والكمية المتاحة وهى ١٥٠ ونضع أقل القيمتين أى أقل (١٣٠ ، ١٥٠) = ١٣٠ ونكرر العمل حتى نوفر كل الاحتياجات عند الغاية $غ_ر$ ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ٥ وننقل كل الكميات عند الأصول و = ١ ، ٢ ، ... ، ٤ فنحصل على الجدول (٣) الذى يحقق تكلفة النقل $ع_.$ = ١٧٠ × ٢ + ٣٠ × ٢,٥ + ١٣٠ × ١,٥ + ٢٠ × ١,٥ + ١٢٠ × ٢ + ١٢٠ × ١ + ١٠ × ٩,٥ + ١٠ × ٢ = ١٢١٥

ويلاحظ أن الحل السابق حل أساسى حيث عدد الخلايا المشغولة

= م + ن — ١ = ٤ + ٥ — ١ = ٨

وبالتالى يمكن تحسينه مباشرة .

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	ح٥	
م١	٢ (٧٠)	٠٫٥ (٣٠)	١	١٠	١٠	٢٠٠
م٢	٢	١٫٥ (١٠٠)	١٫٥ (٢٠)	٢	٣	١٢٠
م٣	٢٫٠	٣	٢ (١٢٠)	١ (١٢٠)	١٫٥ (١٠)	٢٥٠
م٤	٢٫٠	٢	٢	٢	٢ (١٠٠)	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	٧٠٠ / ٧٠٠

جدول (٣) الحل الابتدائى

الخطوة الثانية : <u>تحسين الحل الإبتدائى</u> .

لتحسين الحل الابتدائى السابق بغرض الوصول إلى الحل الأمثل تستخدم طريقة التقيم والغرض منها هو تقيم الخلايا الفارغة (الغير مستعملة فى الحل) ومعرفة هل يمكن تحسين الحل باستخدام احدها من عدمه .

لتقييم أى خلية فارغة ننتقل من هذه الخلية إلى خلية مشغولة بالكمية على نفس الصف ومنها إلى كمية مشغولة فى خليه على نفس العامود للكمية المشغولة السابقة ثم نكرر العمل حتى نصل إلى كمية مشغوله فى خلية على نفس العامود للكمية المشغوله السابقة ثم نكرر العمل حتى نصل إلى كمية مشغوله تقع على نفس العامود للخلية المراد تقيمها فنحصل على مسار يسمى بالمسار الموجه لتقيم هذه الخلية (ومجموعة الجداول (٤) تبين هذه المسارات لجميع الخلايا الفارغة للحل الابتدائى فى جدول (٣)) وعلى هذا المسار يتم تحديد الخلايا المشغوله التى مر بها المسار وتعطى أول تكلفة بالخلية إشارة موجبه والتى تليها سالبه ثم موجبة

وهكذا تتردد الإشاره على المسار حتى نصل إلى الخلية المراد تقيمها . وبجمع هذه القيم نحصل على مؤشر التقيم للخليه الفارغة والذى سوف نرمز له فى حالة الخلية س و غ ر بالرمز ع و ر وفى حالتنا هذه يكون كما يلى :

١ — الخلية س١ غ٢

ع٢١ = ح٢١ − ح٢٢ + ح٣٢ = ٢,٥ − ١,٥ + ١,٥ = ٢,٥

٢ — الخلية س١ غ٤

ع٤١ = ح٢١ − ح٢٢ + ح٢٢ − ح٣٣ + ح٤٣ = ٢,٥ −
١,٥ + ١,٥ − ٢ + ١ = ١,٥

٣ — الخلية س١ غ٥

ع٥١ = ح٢١ − ح٢٢ + ح٣٢ − ح٥٢ = ٢,٥ − ١,٥ +
١,٥ − ٢ + ١,٥ = ٢

٤ — الخلية س٢ غ١

ع١٢ = ح٢٢ − ح٢١ + ح١٦ = ١,٥ − ٢,٥ + ٢ = ١

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
س١						٢٠٠
س٢						١٥٠
س٣						٢٥٠
س٤						١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢	١١٠	

(س١غ٣)

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ر١						٢٠٠
ر٢						١٥٠
ر٣						٢٥٠
ر٤						١٠٠
	١٧٠	١٦٠	[illegible]	١٢	١١٠	

(ر٢غ١)

جدول (٤)

	غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٢٠٠						ر١
١٥٠						ر٢
٢٥٠						ر٣
١٠٠						ر٤
	١١٠	١٢	١٤٠	١٦٠	١٧٠	

(ر٣غ١)

	غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٢٠٠						س١
١٥٠						س٢
٢٥٠						س٣
١٠٠						س٤
	١١٠	١٢٠	١٤٠	١٦٠	١٧٠	

(ر١غ٤)

تابع جدول (٤)

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ر١	○	○				٢٠٠
ر٢		○	○	X		١٥٠
ر٣			○	○	○	٢٥٠
ر٤					○	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

(ر٢ غ٤)

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ر١	○	○				٢٠٠
ر٢		○	○			١٥٠
ر٣		X	○	○	○	٢٥٠
ر٤					○	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

(ر٣ غ٢)

تابع جدول (٤) ١

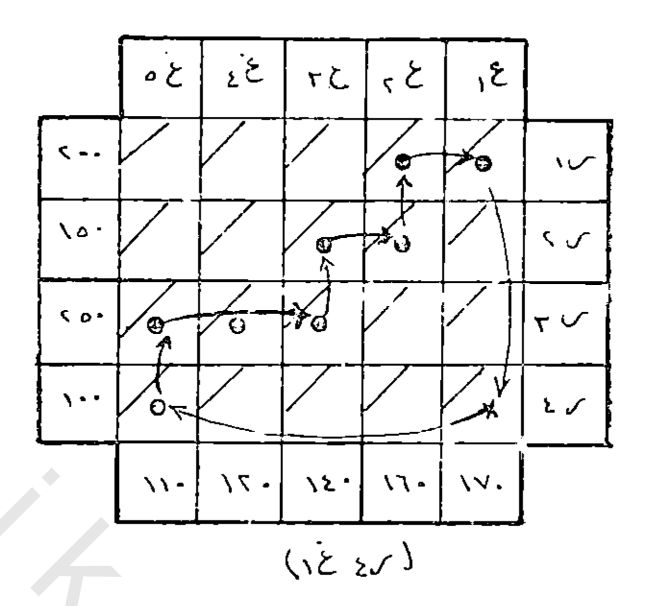
	غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٢٠٠	×					س١
١٥٠						س٢
٢٥٠						س٣
١٠٠						س٤
	١١٠	١٢٠	١٤٠	١٦٠	١٧٥	

(س ١ ، غ ٥)

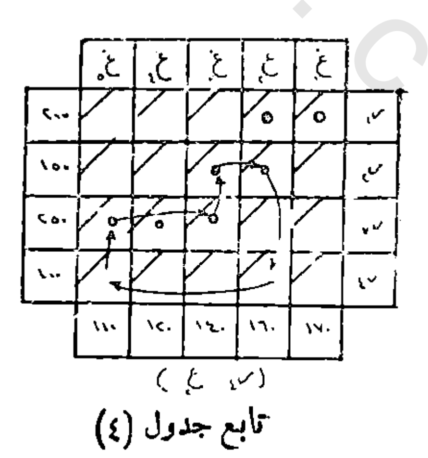
	غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٢٠٠						س١
١٥	×					س٢
٢٥٠						س٣
١٠٠						س٤
	١١٠	[illegible]	١٤٠	١٦٠	١٧٠	

(س ٢ ،

تابع جدول (٤)

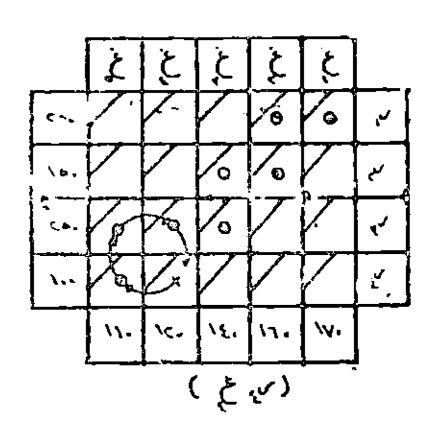


(ر٤ غ١)



(ر٤ غ٢)

تابع جدول (٤)



(س ع غ)

تابع جدول (٤)

٥ — الخلية $س_{٢}غ_{٤}$

$ع_{٢٤}$ = $ح_{٢٢}$ − $ح_{٣٢}$ + $ح_{٣٤}$ = $٥و_{١}$ − ٢ + ١ = $٥و_{١}$

٦ — الخلية $س_{٢}غ_{٥}$

$ع_{٢٥}$ = $ح_{٢٢}$ − $ح_{٣٢}$ + $ح_{٣٥}$ = $٥و_{١}$ − ٢ + $٥و_{١}$ = ١

٧ — الخلية $س_{٣}غ_{١}$

$ع_{١٣}$ = $ح_{٣٣}$ − $ح_{٢٣}$ + $ح_{٢٢}$ − $ح_{٢١}$ + $ح_{١١}$

= ٢ − $٥و_{١}$ + $٥و_{١}$ − $٥و_{٢}$ + ٢ = $٥و_{١}$

٨ — الخلية $س_{٣}غ_{٢}$

$ع_{٢٣}$ = $ح_{٣٣}$ − $ح_{٣٢}$ + $ح_{٢٢}$ = ٢ − $٥و_{١}$ + $٥و_{١}$ = ٢

٩ — الخلية $س_{٤}غ_{١}$

$ع_{١٢}$ = $ح_{٥٤}$ − $ح_{٥٣}$ + $ح_{٣٣}$ − $ح_{٣٢}$ + $ح_{٢٢}$ − $ح_{٢١}$ + $ح_{١١}$

= ٢ − $٥و_{١}$ + ٢ − $٥و_{١}$ + $٥و_{١}$ − $٥و_{٢}$ + ٢ = ٢

١٠ — الخلية $س_{٤}غ_{٢}$

$$ع_{٤٢} = ح_{٤٥} - ح_{٣٥} + ح_{٣٣} - ح_{٢٣} + ح_{٢٢}$$

$$= ٢ - ١٫٥ + ٢ - ١٫٥ + ١٫٥ = ٢٫٥$$

١١ — الخلية $س_{٤}غ_{٣}$

$$ع_{٤٣} = ح_{٤٥} - ح_{٣٥} + ح_{٣٣} = ٢ - ١٫٥ + ٢ = ٢٫٥$$

١٢ — الخلية $س_{٤}غ_{٤}$

$$ع_{٤٤} - ح_{٤٥} - ح_{٣٥} + ح_{٣٤} = ٢ - ١٫٥ + ١ = ٫٥$$

وبعد الحصول على قيم $ع_{ور}$ لجميع الخلايا الغير مشغولة تقارن هذه الكمية بقيمة التكلفة الكلية $ح_{ور}$ لنفس الخلية فإذا كانت :

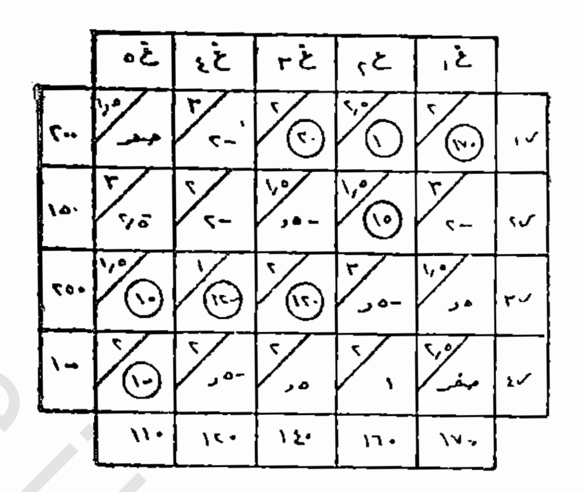
$ع_{ور} - ح_{ور}$ = كمية سالبة أى : $ع_{ور} < ح_{ور}$ فإنه لا يمكن تحسين الحل باستخدامها أما إذا كانت :

$ع_{ور} - ح_{ور}$ = كمية موجبة أى : $ع_{ور} > ح_{ور}$ فإنه يمكننا تحسين الحل باستخدام الخلية ($س_{و}غ_{ر}$) فى الحل . الجدول (٥) يبين جدول النقل وتقييم الخلايا الفارغة حيث تم عملية التقريب فى الواقع مباشرة ، وتفاصيل الجداول فى شكل (٤) الغرض منها الإيضاح فقط .

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ك١	٢ / (٧٠)	٢,٥ / (٣٠)	٢ / ر٥	٣ / ١,٥٠	١,٥ / ر٥	٢٠٠
ك٢	٣ / ٢٠	١,٥ / (١٣٠)	١,٥ / (٢٠)	٢ / ١,٥٠	٣ / ٢٠	١٥٠
ك٣	١,٥ / صفر	٣ / ١٠	٢ / (١٢٠)	١ / (١٢٠)	١,٥ / (١٠)	٢٥٠
ك٤	٢,٥ / ٥٥ر	٢ / ر٥	٢ / ر٥	٢ / ٥٠ر	٢ / (١٠٠)	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جـــــدول (٥)

ولتحسين الحل فى الجدول (٥) نختار أحد الخلايا التى لها قيمة موجبة حيث يمكن إستخدامها لتحسين الحل وذلك لأن أى وحدة منقولة إليها توفر القيمة ($ع_{ر ن} - ح_{ر ن}$) فإذا اخترنا على سبيل المثال الخلية $س_١ غ_٣$ والتى لها $ع_{٣١} - ح_{٣١} = ٥ر$ فإنه يهمنا أن ننقل أكبر كمية فى هذه الخلية . ولتحديد أكبر كمية نتبع المسار الموجة المستخدم فى تقييم هذه الخلية ونختار أقل كمية مصاحبة لتكلفة موجبة على المسار . وفى حالتنا هذه (٢٠) . هذه الكمية تضاف إلى الكميات المصاحبة لتكلفة سالبة وتطرح من الكميات المصاحبة لتكلفة موجبة فنحصل على جدول النقل الجديد فى جدول (٦) .



	غ١	ح٢	غ٣	غ٤	غ٥	
١✓	٢ / (١٧٠)	٢,٥ / (١)	٢ / (٢٠)	٣ / −٢	١,٥ / صفر	٢٠٠
٢✓	٣ / −٢	١,٥ / (١٥)	١,٥ / −٠,٥	٢ / −٢	٣ / ٢,٥	١٥٠
٣✓	١,٥ / ٠,٥	٣ / −٠,٥	٢ / (١٢٠)	١ / (١٢٠)	١,٥ / (١٠)	٢٥٠
٤✓	٢,٥ / صفر	٢ / ١	٢ / ٠,٥	٢ / −٠,٥	٢ / (١٠)	١٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (٦)

وتعطى تكلفة النقل :

ع^(١) = ٢ × ١١٠ + ٢,٥ × ١٠ + ٢ × ٢٠ + ١٦٠ × ١,٥
+ ١٢٠ × ٢ + ١٢٠ × ١ + ١٠ × ١,٥ + ١٠٠ × ٢
= ٢٢٠٥ جنيه .

وواضح أن قيمة الوفر عن الجدول السابق :

ع. − ع^(١) = ٢٠ (ع٣١ − ح٣١) = ٢٠ × ٠,٥ = ١٠

نكرر عملية لتقييم للجدول الجديد كما هو مبين فى الجدول (٦) للخلايا الفارغة . أكبر قيمة موجبة (ع و ر − ح و ر) عند خانة م٤ غ٣ وأكبر قيمة يمكن نقلها (١٠) . بذلك نحصل على الجدول (٧) وتكلفة النقل الجديدة :

ع^(٢) = ١٧٠ × ٢ + ٣٠ × ٢ + ١٥٠ × ١,٥ + ١١ | × ٢
+ ٢٠ × ١,٥ + ٩٠ + ٢ = ١١٩٥ جنيه

ومنه نحصل على جدول رقم (٨) بتكلفة النقل

ع^(٣) = ١٧٠ × ٢ + ٣٠ × ٢ + ١٥٠ × ١,٥ + ٢٠ × ٢
+ ١٢٠ × ١ + ١١٠ × ١,٥ + ١٠ × ٢ + ٩٠ × ٢
= ١١٥٠ جنيه .

ثم جدول رقم (٩) بتكلفة النقل :

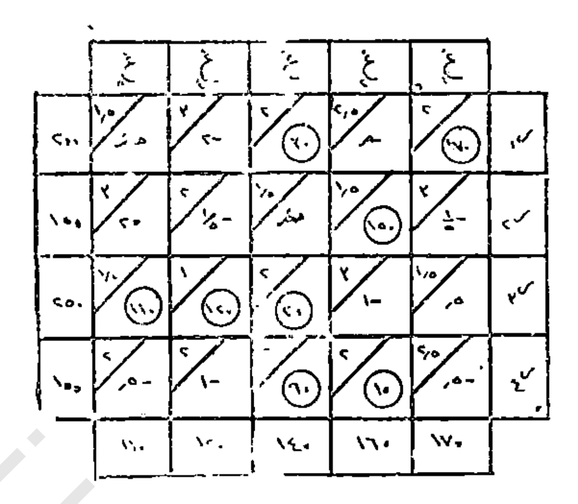
ع^(٤) = ١٠٠ × ٢ + ٥٠ × ٢ + ١٥٠ × ١,٥ + ٢٠ × ١,٥
+ ١٢٠ × + ١١٠ × ١,٥ + ١٠ × ٢ + ٩٠ × ٢
= ١١٤٠ جنيه

ثم جدول رقم (١٠) بتكلفة النقل :

ع^(٥) = ع° = ٤٠ × ٢ + ٥٠ × ٢ + ١١٠ × ١,٥ + ١٥٠
× ١,٥ + ١٢٠ × ١ + ١٠ × ٢ + ٩٠ × ٢ = ١٠٨٥ ج

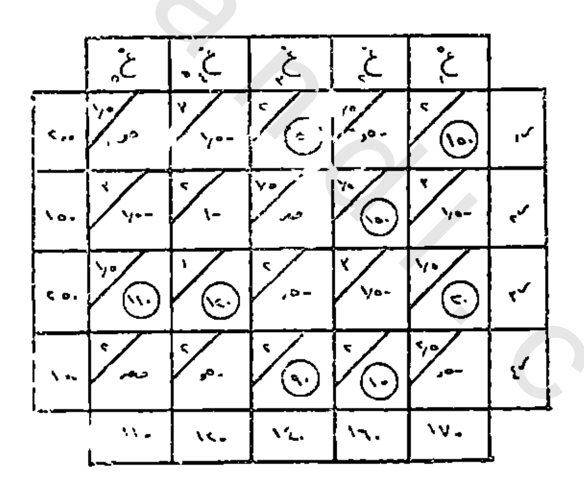
	خ١	خ٢	خ٣	خ٤	خ٥	
م١	٢ / (١٧٠)	٢,٥ / -١	٢ / (٣٠)	٢ / -٣	١,٥ / صفر	٢٠٠
م٢	٢ / -١	١,٥ / (٥٠)	١,٥ / ٠,٥	٢ / -١	٢ / -١,٥	١٥٠
م٣	١,٥ / ٠,٥	١ / ١,٠	١ / (١٠)	١ / (١٢٠)	١,٥ / (٢٠)	٢٥
م٤	٢,٥ / صفر	٢ / (١)	٢ / ٠,٥	٢ / ٠,٥	٢ / (٩٠)	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (٧)



	خ١	خ٢	خ٣	خ٤	خ٥	
م١	٢ / (١٧٠)	٢,٥ / [illegible]	٢ / (٢٠)	٢ / ٢–	١,٥ / [illegible]	٢٠٠
م٢	٢ / ½–	١,٥ / (١٥٠)	١,٥ / صفر	٢ / ½–	٢ / ٢٠	١٥٠
م٣	١,٥ / ,٥	٢ / ١–	٢ / (٢٠)	١ / (١٢٠)	١,٥ / (١١٠)	٢٥٠
م٤	٢,٥ / ,٥–	٢ / (١٠)	– / (٦٠)	٢ / ١–	٢ / ,٥–	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (٨)



	خ١	خ٢	خ٣	خ٤	خ٥	
م١	٢ / (١٥٠)	٢,٥ / ,٥٠–	٢ / (٥٠)	٢ / ١,٥٠–	١,٥ / [illegible]	٢٠٠
م٢	٢ / ١,٥٠–	١,٥ / (١٥٠)	١,٥ / صفر	٢ / ١–	٢ / ١,٥٠–	١٥٠
م٣	١,٥ / (٢٠)	٢ / ١,٥٠–	٢ / ,٥٠–	١ / (١٢٠)	١,٥ / (١١٠)	٢٥٠
م٤	٢,٥ / ,٥٠–	٢ / (١٠)	٢ / (٩٠)	٢ / ,٥٠	٢ / صفر	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (٩)

الخطوة الثالثة : الحل الأمثل :

لإختبار ما إذا كان الحل الاخير أمثل أم لا . نلاحظ فى الجدول (١٠) أن كل القيم فى الخلايا الفارغة $ع_{ور} \geq$ صفر ومن ثم لا يمكن تحسين هذا الحل الاخير . أى أن الجدول (١٠) الذى يعطى $ع^{(٥)} = ١٠٨٥$ هو الحل الأمثل $ع^{*}$.

٤ — ٢ بعض الملاحظات الهامة فى مسألة النقل :

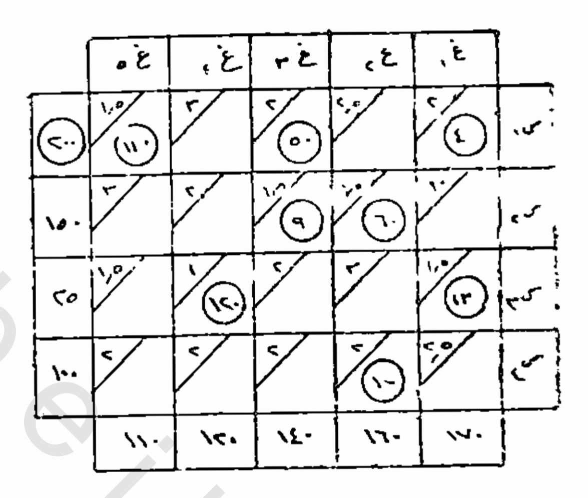
١ — إمكانية الحصول على حلول صحيحة :

يلاحظ أنه إذا كانت كل من القيم المتاحة $ا_و$ والكميات المطلوبة $ب_ر$ إعداد صحيحة فإن الحل الأمثل أيضا يكون أعداد صحيحة . وهذه الخاصية لها دلالاتها الهامة فى مسألة النقل حيث يمكن إستخدامه بنجاح فى بعض نماذج التخصيص ذات المتغيرات الثنائية (الصفر أو الواحد الصحيح) وفى المسائل التوفيقية

٢ — الحلول البديلة :

فى الجدول (١٠) الذى يعطى برنامج النقل الأمثل نلاحظ ظهور صفر عند الخلية $س_{٢٣}$ أى أن : $ع_{٢٣} - ح_{٢٣} =$ صفر

فإذا تتبعنا المسار الموجه لهذه الخلية ونقلنا إليها أى كمية مسموح بها فإن تكلفة النقل لا تتغير . فالجدول (١١) يعطى نفس تكلفة النقل السابقة ولكن ببرنامج نقل آخر .



	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
س١	٢ (٤)	٢,٥	٢ (٥٠)	٣	١,٥ (١١٠)	(٢٠٠)
س٢	٢٠	٢,٥ (٦٠)	١,٥ (٩)	٢,٠	٣	١٥٠
س٣	١,٥ (١٣)	٣	٢	١ (١٢٠)	١,٥	٢٥
س٤	٢,٥	٣ (١٠)	٢	٢	٢	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٣٠	١١٠	

جدول (١١)

وأى جدول جديد مكون من تجميع خطى من الجدولين (١٠ ، ١١) يعطى بالعلاقة :

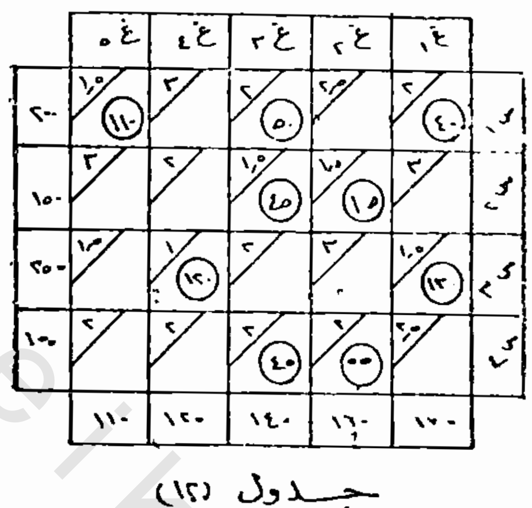
(الحل فى الجدول ١٠) λ + (الحل فى الجدول ١١) (١ — λ)

لكل قيم ١ ≥ λ ≥ صفر

يكون أيضا جدول نقل أمثل . والجدول (١٢) حصلنا عليه من الجدولين ١٠ ، ١١ فى حالة λ = ½ .

ومن المهم أن نلاحظ أن الحل هنا حل غير أساسى حيث عدد الخلايا (المتغيرات) = ٩ > م + ن - ١ = ٨ .

وعلى وجه العموم إذا كان عدد الأصفار فى مقيمات الخلايا الفارغة مقداره (ل) فإنه يكون لدينا (ل + ١) من الحلول الأساسية المثلى البديلة. إفترض أن حك هو الحل الأساسى الأمثل ب ، ك = ١ ، ... ، ل ، ل + ١



	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ص١	٢ (٤٠)	٢,٥	٢ (٥٠)	٣	١,٥ (١١٠)	٢٠٠
ص٢	٣	١,٥ (١٥)	١,٥ (٢٥)	٢	٣	١٥٠
ص٣	١,٥ (١٣٠)	٣	٢	١ (١٢٠)	١,٥	٢٥٠
ص٤	٢,٥	٢ (٥٥)	٢ (٤٠)	٢	٢	١٥٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (١٢)

فإن أى حل (غير أساسى) يعطى بالعلاقة :

$$\left.\begin{aligned} \text{ح}_{\lambda} &= \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ل}+1} \lambda_{\text{ك}}\, \text{ح}_{\text{ك}} \\ \sum \lambda_{\text{ك}} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (٦)$$

يكون أيضاً حلا أمثل :

٣ — وجود متباينات فى مسألة النقل :

تعرضنا فى الصياغة (٥) إلى القيود على شكل معادلات . ولكن قد تحتوى مسائل النقل على قيود على شكل متباينات :

تدنيه :

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ور}} \, \text{س}_{\text{ور}} = \text{ع}$$

مستوفيا

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} \leq \text{ا}_{\text{و}} \qquad (٧)$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{ب}_{\text{و}}$$

ومن السهل أن ندرك أن تحويل المتباينة فى النموذج (٧) يتأتى بإضافة غاية إضافية $\text{ع}_{(\text{ن}+1)}$ ، التى تصاحبها المتغيرات :

$$\text{س}_{\text{و ن}+1} \text{ ، و} = 1 \text{ ، } \ldots \text{ ، م}$$

وتكون الكميات المطلوبة عند هذه الغاية هى :

$$\text{ح}_{\text{ن}+1} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ا}_{\text{و}} - \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{ر}} \qquad (٨)$$

والتكلفة $\text{ح}_{\text{و ، ن}+1}$ المصاحبة للكمية $\text{س}_{\text{و ، ن}+1}$ تساوى الصفر لأنه لا يتم نقلها فى الواقع إلى أى غاية حقيقية ويصبح النموذج (٧) .

تدنيه :

$$\text{ع} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}+1} \text{ح}_{\text{ور}} \; \text{س}_{\text{ور}}$$

مستوفيا

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}+1} \text{س}_{\text{ور}} = \text{ا}_{\text{و}} \\ &\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{ب}_{\text{ر}} \\ &\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ا}_{\text{و}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}+1} \text{ب}_{\text{ر}} \end{aligned}\right\} \quad (٩)$$

وجدول النقل يمثل الجدول (١٣) التالى :

	غ_1	غ_2	...	$\text{غ}_{\text{ن}}$	$\text{غ}_{\text{ن}+1}$	
س_1	ح_{11}	ح_{12}		$\text{ح}_{1\text{ن}}$	٠	ا_1
س_2	ح_{21}	ح_{22}		$\text{ح}_{2\text{ن}}$	صفر	ا_2
⋮						
$\text{س}_{\text{م}}$	$\text{ح}_{\text{م}1}$	$\text{ح}_{\text{م}2}$		$\text{ح}_{\text{من}}$	صفر	$\text{ا}_{\text{م}}$
	ب_1	ب_2		$\text{ب}_{\text{ن}}$	$\text{ب}_{\text{ن}+1}$	

جدول (١٣)

(٤) مسألة الاستحالة وكيفية التغلب عليها :

سبق أن عالجنا مسألة الإستحالة فى البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس . حيث تبين لنا أنه عند وجود حل يحتوى على عدد من المتغيرات اقل من القيود (وجود ارتباط خطى بين القيود) فإنه يستحيل علينا أن نتحرك من نقطة قصوى إلى أخرى بل يتردد الحل وسمينا ذلك بالحلول الحلقية واقترحنا طريقة الحل لإزالة هذا الارتباط بإضافة كمية صغيرة ت على متجه الطلبط وهى الطريقة التى اقترحها شارنز .

وفى مسألة النقل إذا كان الحل ابتدائى (أو أى حل مرحلى) يحتوى على عدد من المتغيرات أقل من م + ن − ١ كان معنى ذلك أن القيود غير مستقلة وصادفنا مسألة الاستحالة أو الفتسخ .

وعلى سبيل المثال إذا غيرنا قيم $ب_٢$ ، $ب_٣$ من مسألة النقل السابقة إلى $ب_٢$ = ١٨٠ ، $ب_٣$ ١٢٠ فيكون لدينا الجدول (١٤) ويلاحظ أن عدد الجدول المشغوله فى الحل الابتدائى = ٧ > م + ن − ١ = ٨ ومعنى ذلك أن الحل غير أساسى .

والواقع أن مسألة الاستحالة السابقة نشأت لوجود ارتباط خطى حيث :

$$ب_١ + ب_٢ = ا_١ + ا_٢ = ٣٥٠$$

ولهذا نلاحظ أن جدول النقل انقسم إلى مجموعتين . فالمجموعة الاولى

$$[م_١ ، م_٢ − غ_١ ، غ_٢]$$

وفيها عدد الخلايا المشغولة ٣ = $م_١$ + $ن_١$ − ١ = ٢ + ٢ − ١

والمجموعة [$س_٢ ب_٤$ — $غ_٢ غ_٤ غ_٥$] وفيها عدد الخلايا المشغولة

$$٤ = م_٢ + ن_٢ - ١ = ٢ + ٣ - ١$$

وبذلك يكون عدد الخلايا المشغولة ٣ + ٤ = ٧

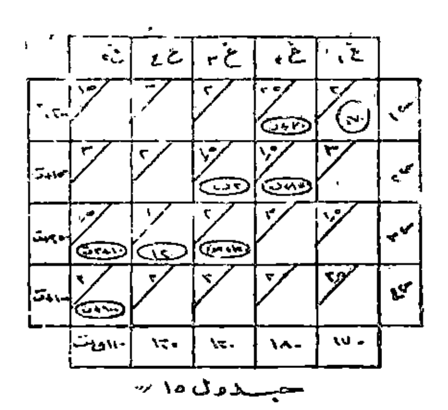
	غ ١	غ ٢	غ ٣	غ ٤	غ ٥	
س١	٢ (١٧٠)	٢,٥ (٣٠)	٢	٣	١,٥	٢٠٠
س٢		١,٥ (٥٠)	١,٥	٢	٣	١٥٠
س٣	١,٥	٣	٢ (١٢٠)	١ (١٢٠)	١,٥ (١٠)	٢٥٠
س٤	٤,٥	٢	٢	٢	٢ (١٠٠)	١٠٠
	١٧٠	١٨٠	١٢٠	١٢٠	١١٠	

جدول (١٤)

وعلى العموم فإنه فى أى جدول نقل مجموع بعض المتطلبات يساوى مجموع بعض الامكانيات أى :

$$\sum_{و=١}^{ك} ا_و = \sum_{س=١}^{ل} ب_س \qquad (١٠)$$

ولحل المسألة نستخدم نفس الأسلوب المقترح فى طريقة السمبلكس بتعديل متجه الإمكانيات والمتطلبات بإضافة ت الصغيرة . وأحد الطرق الممكنة إضافة (ت) على كل قيم الإمكانيات او لتصبح (او + ت) وتعديل قيم المتطلبات بحيث تكون $ب'_س = ب_س$ لجميع قيم $س = ١ ، ٠٠٠ ، ن - ١$ $ب_ن$ = ($ب_ن + م ت$) وبتطبيق ذلك على الجدول (١٤) نؤول إلى جدول (١٥) التالى الذى عدد الخانات المشغولة فيه = م + ن − ١ = ٨



جـدول ١٥

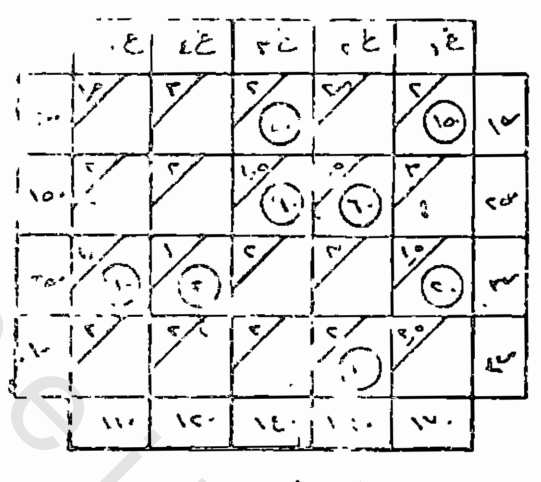
وبذلك يمكن تحسين الحل الأمثل وفى هذه المرحلة نضع ت = صفر

(٥)الحصول على حل ابتدائى أفضل :

فى الطريقه التى استخدمناها الحصول على الحل الابتدائى والتى اصطلحنا على تسميتها (طريقه الركن الشمالى الشرقى) لم نضع فى اعتبارنا أن اختيار مسبق للخلايا أسيساً على تكلفتها . وهناك طرقتين يمكن ذكرهم فى هذا المجال .

١ — طريقة القيمه الصغرى للمصفوفه :

وفيها نختار اقل تكلفة فى الخلايا ونفترض أنها حـ ق هـ وهذه الخلية نقارن (اف ، بـ هـ) ونختار أقل (اف ، بـ هـ) ونضعها فى الخلية (س ف غ هـ) ثم نستمر كما فى الطريقة العادية . وبتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق نجد أن أقل تكلفة نقل عند س٣ غ٤ حيث حـ٣ ٤ = ١ وبمقارنة ا٣ = ٢٥٠ ، ب٤ = ١٢٠ نضع فى الخانة س٤ غ٤ أقل (١٢٠ ، ٢٥٠) = ١٢٠



	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
م١	٢ (١٥٠)	٣	٢ (٥٠)	٣	١,٥	٢٠٠
م٢	٣	٠,٥ (٦٠)	١,٥ (١٠)	٢	٢	١٥٠
م٣	١,٥ (٢٠)	٢	٢	١ (٣)	١,٥ (١٠)	٢٥٠
م٤	٢,٥	٢ (١٠)	٢	٢	٢	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (١٦)

ثم ننتقل إلى خانة تاليه على نفس الجدول على تكلفة تاليه وهى فى حالتنا الحالية (م٣ غ٥) ونقارن الكميه المتبقيه (٢٥٠ — ١٢٠)= ١٣٠ بالكميه المطلوبة عند غ٥ = ١١٠ ونضع أقل القيمتين وهى ١١٠ فى (م٣ غ٥) ثم ننتقل إلى خانة أخرى على نفس الصف له تكلفة منخفضة تالية وهى فى حالتنا م٣ غ١ وتقارن الكمية المطلوبة ١٧٠ بالكمية المتبقية ٢٠ ونضع فيها الكمية ٢٠ . وهكذا فنحصل على الجدول (١٦) .

حيث تكلفة النقل = ١٥٠ × ٢ + ٥٠ × ٢ + ٦٠ × ١,٥ + ٢٠ × ١,٥ + ١٢٠ × ١ + ١١٠ × ١,٥ + ١٠٠ × ٢ = ١١٤٠

ويلاحظ أنها أقل قيمة الحل الإبتدائى فى جدول (٣) وهو ١٢١٥

(ب) طريقة فوجيل :

فى هذه الطريقة التى إفترضها Vögel نوجد فى كل صنف أقل تكلفة حو ن ر ثم أقل تكلفة ثابتة حوك ونحسب الفرق حوك — حو ن ر . وبذلك نحصل على أرقام عددها م تمثل فروق التكلفة لتكلفة لكل الصفوف . وبنفس الطريقة لكل عامود نوجد أقل تكلفة حو ن ر وأقل تكلفة تالية حل ن ر ثم نوجد الفرق حل ن ر — حو ن ر ونحصل على عدد من الأرقام مقدارها ن تمثل الفروق لكل الأعمدة .

وبالنظر لهذه الأرقام التى عددها م + ن نختار أكبر فرق ونفترض أنه حدث عند العمود هـ ولهذا العمود نختار أقل تكلفة ولنفترض أنها عند الخلية (ف ، هـ) . لهذه الخلية نضع أقل (اف ، ب هـ) . نلغى العمود إلى الصف الذى تم استيفاؤه ثم تكرر العمل بالجدول حتى تنتهى من ملأ كل الخلايا ، وبتطبيق هذه الطريقة نحصل على جدول (١٧) حيث تكلفة النقل ١٢١٠ .

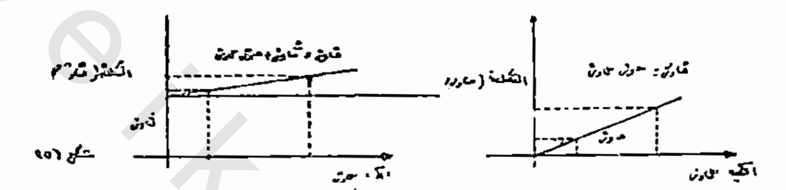
	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
ص١	٢ (٤٠)	٢,٠ (٥٠)	٢	٣	١,٥ (١١٠)	٢٠٠
ص٢	٣	١,٠ (١٠)	١,٥ (١٤٠)	١	٣	١٥٠
ص٣	١,٥ ([illegible])	[illegible]	١	١ (١٢٠)	١,٠	٢٥٠
ص٤	٢,٥	٢ (١٠٠)	٢	٢	٢	١٠٠
	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (١٧)

والطرق السابقة الغرض منها هو تقليل عدد الجداول والتغيرات في مسألة النقل للوصول إلى الحل الأمثل . على أنه ليس من الثابت أن ذلك صحيح .

٦ — التكلفة في مسائل النقل :

في معالجتنا لمسألة النقل اعتبرنا أن تكلفة النقل تبدأ من الصفر وتزداد خطيا بازدياد الكمية المنقولة وذلك كما هو موضح في شكل (١) :



ومن الناحية العملية فإن هناك تكلفة ثابتة ث$_{ور}$ لا تعتمد على الكمية المنقولة أي أن الواقع :

$$ع = \sum_{و=1}^{م} \sum_{ر=1}^{ن} (ث_{ور} + حـ_{ور} س_{ور}) \quad (١٠)$$

فإذا كانت ث$_{ور}$ ثابتة أي ث$_{ور}$ = ث فإنه يمكن طرح ث$_{ور}$ دون أن تؤثر على الحل الأمثل . إما إذا كانت ث$_{ور}$ متغيرة فإنه لا يمكن حل المسألة باستخدام طريقة النقل التقليدية . وتسمى هذه المسألة مسألة التكلفة الثابتة
Fixed Charge Prblem

إلا أنه في بعض الحالات يمكن إجراء بعض التقريب للتغلب على المشكلة سالفة الذكر . فمثلا إذا كان لدينا (كما هو الحال في معظم مسائل التوزيع) عدد الأصول (م) قليل بالنسبة للعدد الغايات (ن) ففي هذه الحالة فإن الحل الأمثل غالبا تكون خاصية أن الغايات يتم إمدادها بأصل واحد فيما عدا حالات قليلة جدا .

والمفهوم السابق يعنى ببساطة أن الكمية المشحونة من الأصل $ر_و$ إلى الغاية $غ_ر$ تكون أقل $(ب_ر ، ا_و) = ص_{ور}$

ومن ثم يمكن إستبدال التكلفة $ح_{ور}$ فى كل خليه بتكلفة أخرى .

$$ت_{ور} = \frac{ث_{ور}}{ص_{ور}} + ح_{ور} \qquad (١١)$$

وبذلك يمكن حل مسألة النقل التقليدية التالية :

تدنيه :

$$ع = \sum_{و} \sum_{ر} ت_{ور} \, س_{ور}$$

مستوفيا

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{ور} = ا_و \qquad (١٢)$$

$$\sum_{و=1}^{م} س_{ور} = ب_ر$$

$$س_{ور} \geq \text{صفر}$$

(٤ — ٤) حل مسألة النقل بطريقة تكلفة الظل (جمع تكاليف الصفوف والأعمدة)

هناك طريقة أبسط لتقييم الخلايا الفارغة فى مسألة النقل وهى طريقة المسارات الموجهة . وفى هذه الطريقة نفترض أن التكلفة $ح_{وم}$ لأى خليه مشغوله هى عباره عن حاصل تكلفة الصف $ط_ى$ ، والعامود $ق_م$ أى

$$\text{ح}_{\text{ف هـ}} = \text{ط}_{\text{ف}} + \text{ق}_{\text{هـ}}$$

و التالى فإنه لتقييم (و ٦ هـ) (ل ٦ هـ) ... (ر ٦ ف) (ر ٦ ن)

فإن

$$\left.\begin{aligned} \text{ع}_{\text{و ن}} &= \text{ح}_{\text{و هـ}} - \text{ح}_{\text{ل هـ}} \cdots - \text{ح}_{\text{ر ف}} + \text{ح}_{\text{ر ن}} \\ &= (\text{ط}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{هـ}} - \text{ط}_{\text{ل}}\ \text{ق}_{\text{هـ}} \cdots - \text{ط}_{\text{ر}} - \text{ق}_{\text{ف}} + \text{ط}_{\text{ر}} \\ &+ \text{ق}_{\text{ن}}) = (\text{ط}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{ن}}) \end{aligned}\right\} \quad (١٣)$$

وبالتالى اذا أمكن الحصول على $\text{ط}_{\text{و}}$ ٦ $\text{ق}_{\text{ن}}$ لأى خانة (ص و ف ن) فإنه لا يلزمنا بعد ذلك سوى جمع ($\text{ط}_{\text{و}}$ + $\text{ق}_{\text{ن}}$) للحصول على $\text{ع}_{\text{و ن}}$ وبذلك نستبدل مقيمات الخلايا

$$\text{ع}_{\text{و ن}} - \text{ح}_{\text{و ن}} = \text{ط}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{ن}} - \text{ح}_{\text{و ن}} \quad (١٤)$$

وعلى سبيل المثال بالنسبة لمسألة النقل فى الجدول (٣) فإن

$\text{ط}_{١} + \text{ق}_{١} = ٢$ ٦ $\text{ط}_{١} + \text{ق}_{٢} = ٢,٥$ ٦ $\text{ط}_{٢} + \text{ق}_{٣} = ١,٥$ ٦ $\text{ط}_{٣} + \text{ق}_{٣} = ٢$ ٦ $\text{ط}_{٣} + \text{ق}_{٤} = ١$ ٦ $\text{ط}_{٣} + \text{ق}_{٥} = ١,٥$ ٦ $\text{ط}_{٤} + \text{ق}_{٥} = ٢$
وباختبار قيمة $\text{ط}_{١}$ = صفر فإننا نحصل على :

$\text{ط}_{١}$ = صفر و $\text{ق}_{١} = ٢$ ٦ $\text{ط}_{٢} = ٢,٥$ و $\text{ق}_{٢} = -١$ ٦ $\text{ط}_{٣} = ٢,٥$ ٦ $\text{ق}_{٣} = -٠,٥$ ٦ $\text{ط}_{٤}$ = صفر ٦ $\text{ف}_{٤} = ١,٥$ ٦ $\text{ق}_{٥} = ٢$

والجدول (١٨) يبين كيفية استخدام الطريقة السابقة ويلاحظ أن القيم مطابقة لجدول الحل الابتدائى (٤) .

ط و	ق ز	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥	
		٢	٢,٥	٢,٥	١,٥	٢	
صفر	س١	٢ / (١٧٠)	٢,٥ / (٣٠)	٢ / ٠,٥	٣ / -٠,٥	١,٥ / ٠,٥	٢٠٠
١٠	س٢	٣ / -٢	١,٥ / (١٣٠)	٢ / (٢٠)	٢ / -١,٥	٣ / ٢	١٥٠
٣٠	س٣	١,٥ / صفر	٢ / ١٠	٢ / (١٢٠)	٢ / (١٢٠)	١ / (١٠)	٢٥٠
صفر	س٤	٢,٥ / -٠,٥	٢ / ٠,٥	٢ / ٠,٥	٢ / -٠,٥	٢ / (١٠٠)	١٠٠
		١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١١٠	

جدول (١٨)

(٤ — ب) مناقشة رياضية : بالرجوع الى الصياغية الرياضية لمسألة النقل كما هو وارد فى النموذج (٥) نجد أنه يمكن كتابتها تفصيلا كما يلى :

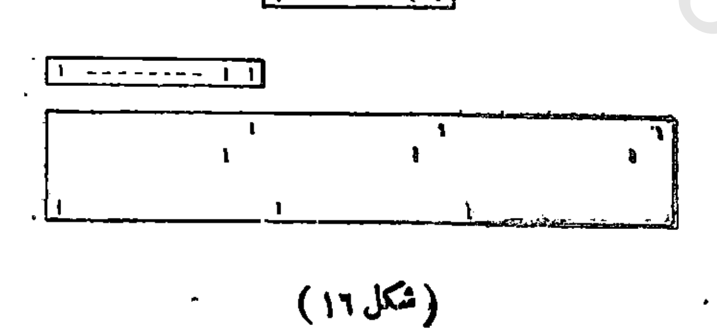
لذلك :

$$ع = ح_{11} س_{11} + ح_{21} س_{21} + \cdots + ح_{ن1} س_{ن1} + ح_{12}$$
$$س_{12} + ح_{22} س_{22} + \cdots + ح_{ن2} س_{ن2} + \cdots + ح_{1م} س_{1م}$$
$$+ ح_{2م} س_{2م} + \cdots + ح_{نم} س_{نم}$$

مستوفيا

$$\left.\begin{array}{l}
س_{11} + س_{21} + \cdots + س_{ن1} = أ_1 \\
س_{12} + س_{22} + \cdots + س_{ن2} = أ_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
س_{1م} + س_{2م} + \cdots + س_{نم} = أ_م \\
س_{11} \quad + س_{12} \quad + س_{1م} = ب_1 \\
س_{21} \quad + س_{22} \quad + س_{2م} = ب_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
س_{ن1} \quad + س_{ن2} \quad + س_{نم} = ب_ن \\
س_{ور} \geqslant صفر \quad و = 1، \cdots، م \quad ر = 1، \cdots، ن
\end{array}\right\} (15)$$

أن مصفوفة المعاملات فى النموذج (١٥) على الشكل التالى



(شكل ١٦)

ولحل المسأله(١٥) بطريقة السمبلكس العادية يلزمنا أولا إضافة م + ن من المتغيرات الوهمية وانشاء جدول السمبلكس ثم اجراء عمليات التغيير — ومن المهم هنا أن نوضح أن المقيمات فى طريقة السمبلكس مناظرة تماما للمقيمات فى جدول النقل حيث فى حالة الحل بطريقة السمبلكس (حيث استبدلنا س ز ر بالمتغير س ر فى صياغة السمبلكس التقليدية)

$$\sum_{و=١}^{م+ن-١} ص و ر \; ح و هـ - ح ر \qquad (١٧)$$

$$ر = (م \times ن) - (م + ن - ١)$$

وتعطى قيم ص و ر من المصفوفه [ص] حيث المتجه ص ر = { ص و ر } يعطى من :

$$ص ر = [اهـ]^{-١} ا ر \qquad (١٨)$$

حيث اهـ مصفوفه الاساسية للمتغيرات الداخلة فى الحل ، ا ر قيمة المتغيرات الغير داخلى فى الحل.

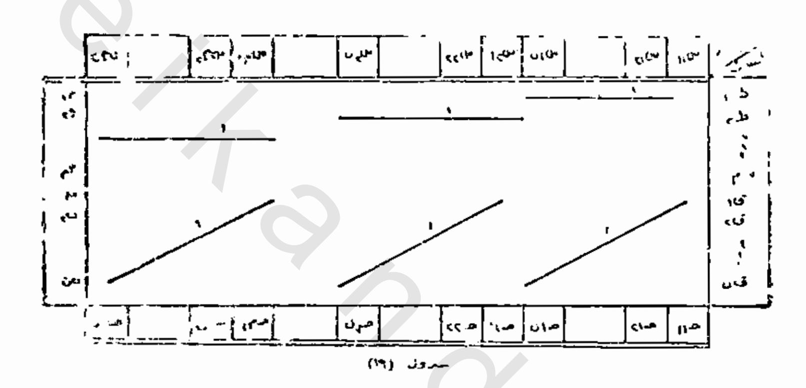
ح ر هـ التكلفة الصاحبة للمتغيرات الداخلة فى الحل ، ح ر تكلفة المتغيرات الغير داخلة فى الحل.

ونظراً لأن المعاملات لكل من اهـ ، ا هى الصفر أو الواحد الصحيح فإن المقيمات (١٧) تكون على الصورة

$$\sum_{و(ل)} (\pm) \; ح و هـ - ح ر \qquad (١٩)$$

حيث و (ل) المجموعة القيمة صفرية للمعاملات $ص_{و ن}$ — والصورة (١٩) هى فى الواقع متناظرة تماما لقيم ($ع_{و ن} - ح_{و ن}$) المحسوبة بطريقة المسار الموجه (الحجز المتنقل) فى مسألة النقل .

وأما بالنسبة لطريقة جمع الصفوف والاعمدة — فإننا سوف نعتبر المسألة الثنائية المسألة الأوليه فى (١٥) — ويبين الجدول (١٩) التالى العلاقة بين المعاملات فى المسألتين .



جدول (١٩)

ومنها نستنتج أن المسألة الثنائية هى :

$$\text{تعظيم ع} = \sum_{و=1}^{م} ط_و ا_و + \sum_{ن=1}^{ن} ق_ن ب_ن \quad \text{مستوفيا}$$

$$ط_و + ق_ن \geq ح_{و ن} \qquad (٢٠)$$

$$ط_و ، ق_ن \quad \text{غير مقيده الاشارة*}$$

$$و = ١ ، ٠٠٠ ، م ؛ ن = ١ ، ٠٠٠ ، ن$$

(*) غير مقيدة الاشارة ناتجة من أن القيود فى المسألة المباشرة على شكل معادلات (راجع المسألة الثنائية) .

بتطبيق ذلك على مسألة النقل فى جدول (٢) نحصل على المسألة التالية :

تعظيم

ع = ٢٠٠ط١ + ١٥٠ط٢ + ٢٥٠ط٣ + ١٠٠ط٤ + ١٧٠ق١ + ١٦٠ق٢
+ ١٤٠ق٣ + ١٢٠ق٤ + ١١٠ق٥

مستوفيا

ط١ + ق١ ≤ ٢
ط١ + ق٢ ≤ ٢ر٥
ط١ + ق٣ ≤ ٢
ط١ + ق٤ ≤ ٣
ط١ + ق٥ ≤ ١ر٥
ط٢ + ق١ ≤ ٣
ط٢ + ق٢ ≤ ١ر٥
ط٢ + ق٣ ≤ ٢
ط٢ + ق٤ ≤ ٤
ط٢ + ق٥ ≤ ٢
ط٣ + ق١ ≤ ١ر٥
ط٣ + ق٢ ≤ ٣
ط٣ + ق٣ ≤ ٢
ط٣ + ق٤ ≤ ٢
ط٣ + ق٥ ≤ ١
ط٤ + ق١ ≤ ٢ر٥
ط٤ + ق٢ ≤ ٢
ط٤ + ق٣ ≤ ٢
ط٤ + ق٤ ≤ ٢
ط٤ + ق٥ ≤ ٢

وفيما يلى القواعد المقترحة لتحديد قيم $ط_و$ ، $ق_ر$

القاعدة الأولى : اجعل $ط_و + ق_ر = ح_{ور}$ لجميع الخلايا المشغوله

ونظراً لوجود ارتباط خطى بين المتغيرات نتيجه للنموذج $ا_و = مجـ ب_ر$ — فإن أى قيمة من $ط_و$ ، $ق_ر$ يتم تحديدها إختياريا . ولنفرض أن $ط_١ =$ صفر فإن ذلك يحدد جميع قيم $ط_و$ ، $ق_ر$ — وفى النموذج (١) ، تكون القيم كما يلى

$ط_١ =$ صفر ، $ط_٢ = -١$ ، $ط_٣ = -٥$ ، $ط_٤ =$ صفر

$ق_١ = ٢$ ، $ق_٢ = ٥ر٢$ ، $ق_٣ = ٥ر٢$ ، $ق_٤ = ٥ر٢$ ، $ق_٥ = ٢$

القاعدة الثانية : إحسب $ع_{ور} = ط_و + ق_ر$ لجميع الخلايا الغير مشغوله

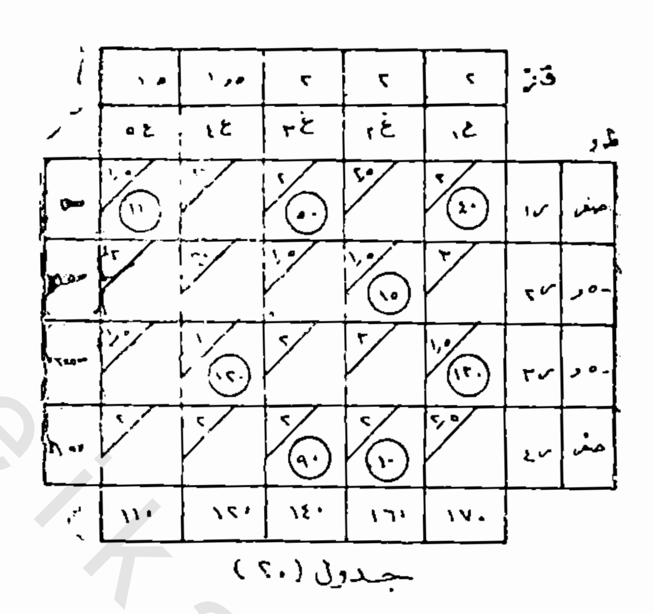
إذا كانت $ع_{ور} - ح_{ور} <$ صفر كان الحل أمثل

وبالنسبة للقاعدة الأولى فهى صحيحة من النظريات الثنائية حيث عندما $س_{ور} >$ صفر فإن ذلك يتطلب ضرورة أن يستوفى القيد المناظر للمسأله الثنائية عند $ط_و + ق_ر = ح_{ور}$

وبالنسبة للقاعدة الثانية فإنه لما كانت كل خلية غير مشغوله تحقق الشرط $ع_{ور} \geq ح_{ور}$ فإن الحل يحقق كل القيود للمسأله الثنائية (وفى نفس الوقت كل قيود المسأله الأولية) فهو بالتالى حل أمثل حيث

$$\sum_{و=١}^{م} \sum_{ر=١}^{ن} ح_{ور} س_{ور}^* = \sum_{و=١}^{م} ا_و ط_و^* + \sum_{ر=١}^{ن} ب_ر ق_ر^* \quad (٢٢)$$

ولإثبات (٢٢) سوف نحسب $ط_و^*$ ، $ق_ر^*$ لجدول الحل الأمثل (جدول ١٠) — كما هو موضح فى جدول (٢٠)



	١,٥	١,٥	٣	٢	٢	قز	
	ح٥	ح٤	غ٣	غ٢	ح١		طو
[illegible]	١,٠ (١١)	[illegible]	٢ (٥٠)	٢,٥	٢ (٤٠)	ص١	صفر
[illegible]	٢	٢	١,٥	١,٥ (١٥)	٣	ص٢	-٥٠
[illegible]	١,٥	١ (١٢٠)	٢	٣	١,٥ (١٣٠)	ص٣	-٥٠
[illegible]	٢	٢	٢ (٩٠)	٢ (١٠)	٢,٥	ص٤	صفر
	١١٠	١٢٠	١٤٠	١٦٠	١٧٠		

جدول (٢٠)

ع° = مجـ ر حـ ر س° ر = ١٠٠ + ٢ × ٥٠ + ٢ × ٤٠

١ × ١٢٠ + ١,٥ × ١٣٠ + ١,٥ × ١٥٠ + ١٥ ×

١٠٨٥ = ٢ × ٩٠ + ٢ × ١٠ +

ع° = مجـ و طو + ب ر قر = (٢٠٠ × صفر + ١٥٠ × ٥٠

٢ × ١٦٠ + ٢ × ١٧٠) + (صفر × ١٠٠ + ٥٠ -

(١,٥ × ١٠٠ + ١,٥ × ١٢٠ + ٢ × ١٤٠ +

١٠٨٥ = (١٢٨٥ + ٢٠٠ -) =

(٤ – ٦) التطبيقات المعيارية لمسألة النقل :

(٤ – ٦ – ١) تخطيط الإنتاج :

من أولى التطبيقات التى حظيت بالاهتمام بعدم استخدام نماذج النقل فى تخطيط الإنتاج وذلك نظراً للسهولة فى العمليات الحسابية وإمكانية معالجة عدد كبير من المتغيرات .

(١) وأحد المسائل الهامة فى هذا المجال(*) والتى يمكن تحويلها ببساطة إلى مسألة نقل هى :

وحدة إنتاجية مطلوب منها برنامج مبيعات معلوم خلال الفترات ن القادمة حيث $ل_و$ المبيعات المخططة للفترة (و) ، و = ١ ، ٢ ، ..... ، ن . ويمكن استخدام الطاقة الإنتاجية المتاحة بالتشغيل العادى خلال هذه الفترات بطاقة إنتاجية قصوى $ط_ر$. كما يمكن استخدام التشغيل الإضافى إذا اقتضى الأمر بحد أقصى $ق_ر$ فى الفترة (ر) ر = ١ ، ..... ، ن كما يمكن التشغيل لدى الغير بطاقة قصوى $ف_ر$. وتبلغ تكلفة الإنتاج بالتشغيل العادى = $ح_ر$ والتشغيل الإضافى $ب_ر$ والتشغيل لدى الغير $أ_ر$ كما تبلغ تكلفة التخزين للوحدة للفترة (م) . ($ح_ر$ < $ب_ر$ < $أ_ر$) والمطلوب تحديد أفضل برنامج إنتاج .

(*) (1) S. Vadga « Reading In Linear Programming » John Wiley & Sons 1958

(2) BoWman « Production Scheduling by Transportieno Method of Linear Programming » Jr. ORSA V4 No 1 1956 pp 100 - 108

يمكن تحـــديد النموذج الرياضى للمسألة السابقة كما يلى (راجع تطبيقات البرمجة الخطية) بفرض أن الكمية $\text{س}_{\text{ور}}$ الكمية المنتجة فى الفترة (و) بالتشغيل العادى والمستخدمة فى الوفاء باحتياجات الفترة (و) وأن $\text{ص}_{\text{ور}}$ ، $\text{ع}_{\text{ور}}$ كميات الإنتاج بالتشغيل الإضافى والتشغيل لدى الغير المنتج فى الفترة ر لسد احتياجات الفترة (و).

تدنيه :

$$\text{ع} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} [\text{حـ}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر})] + \text{ص}_{\text{ور}} [\text{ف}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر})] + \text{ع}_{\text{ور}} [\text{أ}_{\text{ر}} + \text{م} (\text{و} - \text{ر})]$$

مستوفيا

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} \leqslant \text{ط}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ور}} \leqslant \text{ق}_{\text{ر}} \qquad (٢٢)$$

$$\sum_{\text{و}=\text{ر}}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ور}} \leqslant \text{ف}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{ر}=\text{و}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} + \text{ص}_{\text{ور}} + \text{ع}_{\text{ور}} = \text{ك}_{\text{و}}$$

$$\text{س}_{\text{ور}} ، \text{ص}_{\text{ور}} \text{ع}_{\text{ور}} \geqslant \text{صفر}$$

ويمكن تمثيل المسألة فى الجدول (٢١) :

(فترة الاستخدام)

فترة الحصول		١	٢	٣	...	ن - ١	ن	
١	ط١	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	ط١
	ق١	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	ق١
	ف١	ح١١	ح١٢	ح١٣		[illegible]	[illegible]	ف١
٢	ط٢	ك	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	ط٢
	ق٢	ك	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	ق٢
	ف٢	ك	ح٢٢	ح٢٣		[illegible]	[illegible]	ف٢
.								
ن	طن	ك	ك	ك		ك	[illegible]	طن
	قن	ك	ك	ك		ك	[illegible]	قن
	فن	ك	ك	ك		ك	[illegible]	فن
		ل١	ل٢	ل٣		لن - ١	لن	

جدول (٢١)

وعلى سبيل المثال افترض مسألة تخطيط لها ت = ٤ وتعطى قيم ك و ، ط ن ر ،
ق ن ر فى الجدول (٢١) ويفترض عدم إمكانية التشغيل لدى الغير (ف و ،
ح و ر = صفر) تكلفة التخزين للوحدة للفترة م = ١

الفترة (و ، ن)	١	٢	٣	٤
$ك_و$	٥	٦	٨	٦
$ط_ن$	٩	٩	٩	٩
$ت_ن$	٢	٢	٢	٢
$ص_ن$	١	٤	٢	٤
$س_ن$	٢	٦	٤	٦

جدول (٢١)

ومنها نحصل على جدول النقل (٢٢) الذي يعطي الحل الأمثل . ويلاحظ في الجدول (٢٢) أننا أضفنا الفترة (٥) لتستوعب الاحتياج الوهمي ك .

أسعار ظل الأعمدة	١	٢	٢	٣	١-		
	١	٢	٣	٤	٥		أسعار ظل الصفوف
١	١ (٥)	٢ (٤)	٣	٤		٩	
	٢	٣ (٢)	٤	٥	٠ (١)	٢	١
٢	ك	٤	٥	٦	٠ (٩)	٩	١
	ك	٦	٧	٨	٠ (٢)	٢	١
٣	ك	ك	٢ (٨)	٣ (١)	٠	٩	٠
	ك	ك	٤	٥	٠ (٢)	٢	١
٤	ك	ك	ك	٤ (٥)	٠ (٤)	٩	١
	ك	ك	ك	٦	٠ (٢)	٢	١
	٥	٦	٨	٦	٢٧		

جدول (٢٢)

$$حيث\ ك_٥ = \sum_{ن=١}^{٤} (ط_ن + ق_ن) - \sum_{و=١}^{٤} ك_و$$

- والتكلفة المصاحبة للعامود ك. أى ح. ن = صفر . حيث أن ظهوره كميات فى هذ العامود يعنى طاقة غير مستقلة .

كما ظهرت تكلفة كبيرة ك فى الخلايا التى يجب إلا تستخدم فى الحل لعدم إمكانيتها . وتبين حواف الجدول تكلفة الظل للصفوف والأعمدة . والتى توضح أن ع و ن ≥ ح و ن لجميع الخلايا الغير مشغولة أى أن الجدول (٢٢) حل أمثل .

(ب) ولقد سبق أن أوضحنا أن نموذج النقل على الصورة

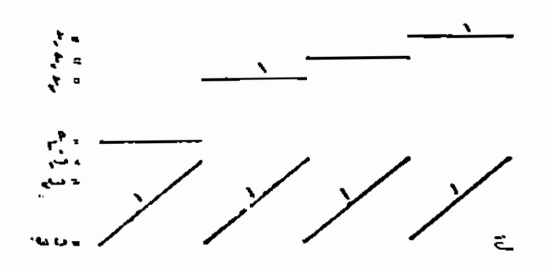
تدنيه :

مجـ مجـ ح و ن س و ن
و ن

مجـ س و ن = ا و
ن

مجـ س و ن = ب ن
و

هى مسأله برمجة خطية تترتب فيها المعاملات على الصورة الخاصة التالية :



وبالعكس إذا كانت مسألة البرمجة الخطية يمكن ترتيب حدودها لتأخذ الشكل السابق فإنه يمكن تحويلها مباشرة إلى مسألة النقل وتعنى ذلك اختزال المتغيرات التى عددها (م × ن) والقيود التى عددها (م + ن) إلى جدول نقل (م × ن) حله ميسور . وللدلالة على ذلك سوف نعتبر المثال التالى :

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية يقوم بإنتاج أربعة أنواع رئيسية من اللمبات على خمسة مجموعات انتاجية والجدول التالى جدول (٢٣) يبين الطاقة الإنتاجية (لمبة / ساعة) لإنتاج كل نوع من أنواع اللمبات على أى مجموعة — كما يوضح الساعات المتاحة للإنتاج وكمية الإنتاج المطلوبة . والخانات المشطوبة فى الجدول تعنى عدم إمكانية إنتاج نوعية اللمبات المعنية على المجموعة الإنتاجية .

المجموعات الإنتاجية	غ١ لمبات عادية	غ٢ لمبات شمعة	غ٣ لمبات صغيرة	غ٤ لمبات كبيرة	ساعات التشغيل المتاحة سنويا
مج١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠	✕	٣٠٠٠
مج٢	١٠٠٠	✕	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠٠
مج٣	١٥٠٠	١٠٠٠	✕	١٢٠٠	٤٠٠٠
مج٤	١٠٠٠	١٥٠٠	✕	✕	٤٠٠٠
مج٥	٨٠٠	✕	٨٠٠	٦٥٠	٥٠٠٠
الكمية المطلوبة بالمليون	١٠	٥	٢	٢	

(جدول الطاقة الإنتاجية)

جدول (٢٣)

ويبين الجدول (٢٤) تكلفة انتاج الالف لمبة على كل مجموعة . والاختلاف فى

[في التكلفة يرجع إلى درجة الاوتومانية والكفاءة التشغيلية لكل نوع من أنواع الطلبات على المجموعات الإنتاجية ونسب المواد المتوقعة .

جدول (٤٤)

تكلفة الإنتاج

	ع١	ع٢	غ٣	غ٤
ر١	٢٨	٢٧	٢٧	X
ر٢	٢٨	X	٢٧	٤٠
ر٣	٢٥	٢٦	X	٢٩
ر٤	٢٥	٢٦	X	X
ر٥	٢١	X	٢٩	٤٥

افترض أن س و ر الكمية بالألف من النوع ر المنتجة على المجموعة و فإنه يكون لدينا النموذج التالى :

$$ع = ٢٨س_{١١} + ٢٧س_{٢١} + ٢٧س_{٣١} + ٢٨س_{١٢} + ٢٧س_{٢٢} + ٤٠س_{٤٢}$$
$$+ ٥٠س_{١٣} + ٢٦س_{٢٣} + ٣٩س_{٤٣} + ٢٥س_{١٤} + ٢٦س_{٢٤} + ٣١س_{١٥}$$
$$+ ٢٩س_{٣٥} + ٤٥س_{٤٥}$$

مستوفياً

$$س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} \le ٢٥٠٠$$
$$س_{١٢} + س_{٢٢} + ١,٢٥س_{٤٢} \le ٤٠٠٠$$
$$,٦٦س_{١٣} + ,٦٦س_{٢٣} + ,٨٢س_{٤٣} \le ٤٠٠٠$$
$$,٦٦س_{١٤} + ,٦٦س_{٢٤} \le ٤٠٠٠$$
$$١,٢٥س_{١٥} + ١,٢٥س_{٣٥} + ١,٥س_{٤٥} \le ٣٠٠٠$$
$$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} + س_{١٥} \le ١٠٠٠٠$$
$$س_{٢١} + س_{٢٣} + س_{٢٤} \le ٥٠٠٠$$
$$س_{٣١} + س_{٣٣} + س_{٣٥} \le ٣٠٠٠$$
$$س_{٤٢} + س_{٤٣} + س_{٤٥} \le ٢٠٠٠$$
$$س_{ور} \ge صفر$$

ويلاحظ أن معاملات القيود $(ا_{ور}) = \left[\frac{١٠٠٠}{\text{الطاقة الانتاجية / ساعة}}\right]$

وذلك طبقاً لقيم الطاقة الإنتاجية / ساعة من جدول (٢٣)

ويلاحظ أن المعاملات $ا_{ور}$ ليست كلها تساوى الواحد الصحيح كما هو المطلوب لنموذج النقل — ولكن إذا قسمنا القيد الثالث والرابع مع ,٦٦ وقسمة القيد الخامس على ١,٢٥ — ويضرب القيد العاشر فى ١,٢٥ نحصل على القيود التالية :

$$س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} \le ٤٥٠٠$$

$$س_{١١} + س_{٢٢} + ١,٢٥\, س_{٤٢} \le ٤٠٠٠$$

$$س_{١٣} + س_{٢٣} + ١,٢٥\, س_{٤٣} \le ٦٠٠٠$$

$$س_{١٤} + س_{٢٤} \le ٩٠٠٠$$

$$س_{١٥} + س_{٢٥} + ١,٢٥\, س_{٤٥} \le ٣٠٠٠$$

$$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} + س_{١٥} \le ١٠٠٠٠$$

$$س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٤} \le ٥٠٠٠$$

$$س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٥} \le ٣٠٠٠$$

$$١,٢٥\, س_{٤٢} + ١,٢٥\, س_{٤٣} + ١,٢٥\, س_{٤٥} \le ٢٥٠٠$$

ويلاحظ أن جميع المعاملات فى هذه القيود اصبحت مساوية للواحد الصحيح ، فيما عدا معاملات $س_{٤٢}$ ، $س_{٤٣}$ ، $س_{٤٥}$ فهى تساوى ١,٢٥ فى جميع القيود .

لذلك فإنه بقسمه الأعمدة الواقعة عليها هذه المتغيرات أى أعمده $س_{٤٢}$ ، $س_{٤٣}$ ، $س_{٤٥}$ بما فى ذلك قسمة معاملات هذه المتغيرات فى دالة الهدف أى معاملات $ح_{٤٢}$ ، $ح_{٤٣}$ ، $ح_{٤٥}$ على نفس القيمة وهى ١,٢٥ لحصلنا على مسألة النقل النمطية التالية :

ع = ٢٨س١٠ + ٢٧س٢١ + ٢٧س٣١ + ٢٨س١٢ + ٢٧س٢٢ + ٣٢س٤٢ + ٢٥س١٣ + ٢٦س٢٣ + ٣١س٤٣ + ٢٥س١٤ + ٢٦س٢٤ + ٣١س١٥ + ٢٩س٢٥ + ٣٦س٤٥

مستوفياً

س١١ + س٢١ + س٣١ ≤ ٢٥٠٠

س١٢ + س٣٢ + س٤٢ ≤ ٤٠٠٠

س١٤ + س٢٣ + س٤٣ ≤ ٦٠٠٠

س١٤ + س٢٤ ≤ ٦٠٠٠

س١٥ + س٢٥ + س٤٥ ≤ ٢٥٠٠

س١٢ + س١٣ + س١٤ + س١٥ ≤ ١٠٠٠٠

س٢٣ + س٢٤ ≤ ٥٠٠٠

س٣٢ + س٢٥ ≤ ٣٠٠٠

س٤٢ س٤٣ + س٤٥ ≤ ٢٥٠٠٠

س و ر ≥ صفر

ويمكن تمثل هذه المسالة بجدول النقل التالى (جدول ٢٥)

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	غ٥ (الكمية الفائضة)	
م١	٢٨	٢٧	٢٨	ك	٠	٢٥٠٠
م٢	٢٨	ك	٢٧	٣٢		٤٠٠٠
م٣	٢٥	٢٦	ك	٣١		٦٠٠٠
م٤	٢٥	٢٦	ك	ك		٦٠٠٠
م٥	٢١	ك	٢٩	٣٦	٠	٢٥٠٠
	١٠٠٠٠	٥٠٠٠	٣٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠	

(المباني: غ١ … غ٤)

جدول (٢٥)

ونلاحظ فى جدول (٢٥) أن التكلفة ك تظهر فى الخانات التى لا يمكن شغلها (لا يمكن إنتاج أنواع اللمبات على هذه المجموعات) وحيث ك رقم كبير وأن التكلفة صفر تظهر مصاحبة للعامود غ، الذى يمثل الكمية الفائضة حيث أنه يمثل الطاقة العاطلة للمجموعات.

وتبين الجداول ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ مراحل حل المسألة حيث إستخدمنا طريقة جمع الصفوف والأعمدة[٥].

---

(٥) عند إستخدام طريقة جمع الصفوف والأعمدة وتحديد أسعار الظل $ق_{و}$ ، $ط_{ر}$ حيث $ح_{ور} = ق_{و} + ط_{ر}$ للخلايا المشغولة ، $ع_{ور} = ق_{و} + ط_{ر}$ للخلايا الغير مشغولة . فإننا يجب أن نذكر أنه إذا كانت المعاملات الناتجة بعد معالجتها الغير مساوية للوحدة كانت لها قيم لا تساوى الوحدة ولكنها قريبة من الوحدة أى أن القيود كانت $\sum_{ر} أ_{ور} س_{ور} \leq أ_{و}$ ، $\sum ب_{ور} س_{ور} \leq ب_{ر}$. فإنه فى هذه الحالة يتم تحديد أسعار الظل من :

$ح_{ور} = أ_{ور} ق_{و} + ب_{ور} ط_{ر}$ للخلايا المشغولة ، $ع_{ور} = أ_{ور} ق_{و} + ب_{ور} ط_{ر}$ للخلايا الغير مشغولة .

ويكون الحل أمثل عندما $ع_{ور} \leq ح_{ور}$ لكل و ، ر وللتفصيلات أكثر راجع :

Charnes, Cooper Management Model and Industrial Applications of Linear Programming, Part I pp 535 - 548, John Wiley & Sons 1961.

قدو							ط ن
		٥٠	٢٩	٢٤	٢٧	٢٦	
		غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٠	٢٥٠٠	٠ / ٥٠	ک	٢٨ / ٤٠	٢٧ / (٢٥٠٠)	٢٩ / ٢٠	س١
٣٠	٤٠٠٠	٠ / ٢٠	٢٢ / (٢٥٠)	٢٧ / (١٥٠٠)	ک	٢٨ / ١	س٢
١٠	٦٠٠	٠ / ٦٠	٢١ / ٣٠	ک	٢٦ / (٢٥٠)	٢٥ / (٣٥٠)	س٣
١٠	٦٠٠٠	٠ / ٦٠	ک	ک	٢٦ / ٠	٢٥ / (٦٠٠)	س٤
٥	٢٥٠٠	٠ / (٥٠٠)	٢٦ / ٢٠	٢٩ / (١٥٠٠)	ک	٢١ / (٥٠٠)	س٥
		٥٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	٥٠٠٠	١٠,٠٠٠	

جدول ٢٦

							ط ن
		٣٠	٢٥	٢٤	٢٧	٢٦	
		غ ٥	غ ٤	غ ٣	ع ٢	غ ١	
	٢٥٠٠	٠ / ٣٠	ک	٢٨ / ٤٠	٢٧ / (٢٥٠٠)	٢٨ / ٢٠	س١
٣	٤٠٠٠	٠ / (٥٠)	٣٢ / (٢٥٠)	٢٧ / (١٠٠)	ک	٢٨ / ١	س٢
١٠	٦٠٠٠	٤٠	٣١ / ٣٠	ک	٢٦ / (٢٥٠٠)	٢٥ / (٣٥٠)	س٣
١٠	٦٠٠٠	٤٠	ک	ک	٢٦ / ١	٢٥ / (٦٠٠)	س٤
٥	٢٥٠٠	٠ / ٢	٣٦ / ٢٠	٢٩ / (٢٠٠٠)	ک	٣١ / (٥٠)	س٥
		٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	٥٠٠٠	١٠,٠٠٠	

جدول ٢٧

قدو							ط ن
		٤	٢٠	٢٥	٢٧	٢٦	
		غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١	
٠٠	٢٥٠٠	٠ / ٤٠	ک	٢٨ / ٣٠	٢٧ / (٢٥٠٠)	٢٨ / ٢٠	س١
٢	٤٠٠٠	٠ / ٢٠	٢٢ / (٢٥٠٠)	٢٧ / (١٠٠٠)	ک	٢٨ / (٥٠)	س٢
١٠	٦٠٠٠	٠ / ٥٠	٢١ / ٢٠	ک	٢٦ / (٢٥٠٠)	٢٥ / (٤٠٠٠)	س٣
١٠	٦٠٠٠	٠ / ٥٠	ک	ک	٢٦ / ٠	٢٥ / (٣٠٠٠)	س٤
٤	٢٥٠٠	٠ / (٥٠٠)	٢٦ / ٢٠	٢٩ / (٢٠٠٠)	ک	٢١ / ١٠	س٥
		٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	٥٠٠٠	١٠,٠٠٠	

جدول [illegible]

وجدول (٢٨) يمثل الحل الأمثل حيث يتم تحميل الماكينات بناء عليه ، وعلى العموم إذا أمكن عمل نموذج رياضى لمسألة من مسائل البرمجة الخطية مثل تحميل الماكينات واتخذت شكل مسألة النقل ولكن المعاملات مختلفة عن الوحدة وأمكن تحويل هذه المعاملات إلى الوحدة بالطريقة الآتية :

١ — ضرب معاملات القيود (الصفوف) فى ثابت $ل_ر$ بما فى ذلك الكميات المتاحة والمتطلبات ($أ_ر$ ، $ب_ر$)

٢ — ضرب معاملات الأعمدة (هـ) فى ثابت $ى_ر$ بما فى ذلك التكاليف $حـ هـ_ر$

فإنه يمكننا حل المسأله كمسأله نقل تقليديه وتوفير الكثير من الجهد الحسابى .

والمسأله السابقة تبسيط للمسأله الحقيقية التى تم دراستها وأخذ فى الاعتبار تزامن الإنتاج من خطط البيع والمخزون بين فقرات الإنتاج — وهى فقط للإيضاح .

(حـ) فى المسأله البسيطة السابقة يمكن تحويل المسأله إلى مسأله نقل باستخدام مفهوم الساعة الخطية للإنتاج — حيث يلاحظ أننا إذا إفترضنا أن المجموعة ($م_١$) مجموعة نمطية وأن ساعات التشغيل المتاحة ٣٠٠٠ ساعات تشغيل نمطية — فإنه يمكننا تعديل ساعات التشغيل لباقى المجموعات لتصبح ساعات التشغيل نمطيه حيث بمقارنة منتجات شبيهه نجد أن ساعات التشغيل للماكينة ($م_٢$) تكون أيضاً $٤٠٠٠ \times \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠} =$ ٤٠٠٠ ساعة نمطية . بينما للماكينة $م_٣$ تكون :

$= ٤٠٠٠ \times \frac{١٥٠٠}{١٠٠٠} =$ ١٠٠٠ ساعة فقط وكذلك بالنسبة للماكينة $م_٤ =$

$٤٠٠ \times \frac{١٥٠٠}{١٠٠٠} =$ ٦٠٠٠ ساعة نمطيه — وبالنسبه للماكينة م٥ =

$٢٥٠٠ \times \frac{٨٠٠}{١٠٠٠} =$ ٢٠٠٠ ساعة نمطيه ـ وبالتالى يتحول جدول (٢٣) الى الجدول التالى مع ملاحظة أنه تم استبدال كميات الإنتاج ساعات عيارية للتشغيل وهى $\frac{\text{الإنتاج المطلوب}}{\text{الإنتاج المعيارى / ساعة}}$

	غ١	غ٢	غ٣	غ٤	ساعات التشغيل المطلوبة
م١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠	—	٣٠٠٠
م٢	١٠٠٠	—	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠٠
م٣	١٠٠٠	١٠٠٠	—	٨٠٠	٦٠٠٠
م٤	١٠٠٠	١٠٠٠	—	٨٠٠	٦٠٠٠
م٥	١٠٠٠	—	١٠٠٠	٨٠٠	٢٠٠٠
ساعات التشغيل المتاحة	١٠٠٠٠	٥٠٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	

وفى هذه الحالة، يجب استبدال التكلفة حو ن الخاصه بالوحدات لتصبح تكلفه ساعة التشغيل النمطيه — وذلك بضرب تكلفه الوحده فى عدد الوحدات المنتجه فى الساعه النمطية (ويلاحظ أن حو ن المعطاه فى المسأله التكلفة لكل ١٠٠٠ لمبه) وينتج عن ذلك أن قيم حو ن الجديدة تكون نفس القيم السابقة فيما عدا القيم للعامود غ٤ حيث يصبح ٨, من قيم حو٤ السابقة أى ٨, (٤٠) = ٣٢ ,٨ × ٣٩ = ٣١ ,٨ × ٤٥ = ٣٦ — وبذلك نبدأ جدول النقل ... تماما الجدول (٢٥).

ولكن الطريقة المشروحة تحت (ب) أكثر عموميه ودقه.

٤ — ٦ — ٢) مسألة متعهـــد الوجبات

أول من صاغ المسأله هو جاكوبر عام ١٩٥٤ (*) الذى أوضح أبعاد المسأله ونطاق التطبيق كما عين الشروط التى على أساسها يمكن الحصول على حلول صريحه للمسأله بإجراء سلسلة من التحويلات الرياضية .

إلا أن حل المسألة كأحد نماذج النقل أوضحه بارجر (**) فى عام ١٩٥٦ وفى عام ١٩٥٧ أوضح بيل (***) كيفية عمل نموذج نقل نمطى للمسأله .

والواقع أن المسأله ظهرت فى الإستخدامات العسكرية ثم حورت لتكون مسأله (متعهد الوجبات) ـ وهى من المسائل الطريفة والهامة فى نفس الوقت ـ وهى أيضا مسأله برمجة خطية ديناميكيه لذلك سوف نعود إليها مره أخرى عند دراستنا للبرمجه الديناميكية .

ويتعدد مجال التطبيق لهذه المسأله — ففى مجال الطيران الحربى ولمستوى معين من الأداء يكون علينا أن نخطط لإستخدام آليات الطيران الإحتياطية أو إجراء صيانة سريعة للآليات واستخدامها أو اجراء صيانة شاملة للآليات وإستخدامها ـ وهذا القرار الثلاثى يواجهنا أيضاً فى مجال الصناعات الكيماوية فإن استخدام العوامل المساعده أو الوسيطة فى العمليات الكيماوية يواجهنا بنفس القرار حيث يكون لدينا إما أن نستبدل العامل الوسيط أو نقوم بعلاجه بعد الاستبدال بطريقة سريعة ومكلفه أو طريقة بطيئه ومنخفضه التكاليف وعمليه

(*) Jacobr, W " The Caterer problem " Naval Research logistics Quarterly N0l 1954 PP 154 - 165

(**) Pnager, W « on The Caterer Problem » g, Manragement Science 1956 Voe 3 N11

(***) Beale, E.M.L « Letten To Thb editor) Management Scienc 957 , Voe 4 Nol

التخطيط لهذه العملية الثلاثية لاختيار الطريقة المناسبة مع الزمن هو أهم ما يواجهنا في المسأله .

في الصناعات البترولية يستخدم عامل مساعد من البلاتين المكثف هدفه تحويل سلاسل الهيدروكربونات الكبيرة إلى أخرى صغيره لتحسين الدفاعة الاوكتينيه للبنزين — هذا العامل المساعد يمكن بعد استخدامة أن يستبدل أو يعاد معالجته بطريقتين أحدهما سريعه وكثيره التكاليف والاخرى بطيئه ومنخفضه التكاليف .

وكذلك في صناعة الحرير الصناعي حيث يتم إذابة السليلوز في ثاني كبريتيد الكربون وهيدروكسيد الصوديوم ويشق المذيب في محلول حمض لإنتاج الحرير الصناعي — وثاني كبريت الكربون يمكن استبداله أو استخدامة مره أخرى بعد معالجة — وهذه المعالجة يمكن أن تتم بطريقتين أحدهما سريعة ومكلفة و الاخرى بطيئه وأقل تكلفة . والمطلوب تحديد هيكل القرار مع الزمن .

كل هذه المسائل رغم اختلاف طبيعتها يمكن التعبير عنها كمسألة متعهد وجبات كما أوضح جاكوبر (٥) يقوم متعهد وجبات بإعداد الوجبات للأيام القادمة التي عددها (ن) وهو يعلم تماما أنه يحتاج في اليوم (ر) عدداً من الفوط النظيفه مقدارها كر لخدمة الزبائن . وأي فوطه متسخة يقوم بغسلها في مغسل وتحتاج إلى عدد من الأيام مقدار (ل) لتعود للإستخدام نظيفة — أي أن الفوط المتسخة في اليوم (ر) يمكن استخدامها مره ثانية في اليوم (ر + ل) — على أن المغسل يمكن أن يؤدى خدمة سريعة تستغرق وقتا هـ حيث هـ < ل ولكن بتكلفة أكبر فإذا فرضنا أن ثمن الفوطة الجديدة ا وتكلفة الخدمة السريعة ب وتكلفة الخدمة العادية حـ حيث ا > ب > حـ . فالمطلوب هو تنظيم عدد

الفوط الجديدة وميعاد دخولها فى خدمة الزبائن وكذلك مقدار الفوط التى ترسلها للتنظيف بالغسل بالخدمة السريعة والخدمة العادية لتغطية الاحتياجات ل ن فى كل يوم وذلك بأقل تكاليف كليه ؟

افترض أن و ، و = ١ ، ... ، ن تمثل اليوم الذى ترسل فيه كمية معينة من الفوط المتسخة مقدارها س إلى المغسل وأن ر اليوم الذى ترجع فيه هذه الفوط نظيفه من المغسل وبذلك يتوفر لدينا العلاقات الأساسية التالية .

إذا كانت ر - و ⩾ ل

فإن التكلفة تكون (ح) أى القرار هو أرسال الفوط للخدمة العادية - بينما إذا كانت : [هـ ⩾ ر - و ⩾ ل] فإن التكلفة تكون ب وهى أقل تكلفة ممكنه أى أن القرار هو ارسال الفوط للخدمة السريعه .

فإذا فرضنا أن $س_{و ر}$ هى الكمية المرسلة فى اليوم و والمستلمة فى اليوم ر ، $ط_و$ الكمية من الفوط المتسخة فى اليوم و والمرسله اليه يمثل فى اليوم (و) وأن $ر_و$ والعدد الكلى للفوط المرسلة فى اليوم (و)

فإن :

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{و ر} \leqslant \sum_{و=1}^{ن} ط_و = ر_و$$

$$و = ١ ، ٢ ، ... ، ن \qquad (٢٣)$$

والمتباينة السابقة تنص على أن جميع الفوط المرسلة فى اليوم و وتم إستلامها فى اليوم ر إلا أنه يمكن إستخدامها فى أيام أخرى بعـــد ذلك . كما أن المتباينة توضح أنه من الممكن أن ترسل فى اليوم (و) كمية أقل من كل الكمية المستعملة فى هذا اليوم وهذا القرار صحيح فى نهاية أو قرب نهاية المدة موضع التخطيط .

وبنفس الطريقة فإن :

$$\sum_{و=1}^{ن} س_{ور} \geq \qquad \sum_{ر=1}^{ن} ط_{ر} = ح_{ر} ،$$

$$ر = 1 ، \ldots ، ن \qquad (٢٤)$$

حيث ح$_{ر}$ عدد الفوط النظيفة فى اليوم ر ، ط$_{ر}$ عدد الفوط التى تم إستلامها فى اليوم ر من المغسل .

ومن الممكن أن تحول المتباينات السابقة إلى معادلات بإضافة متغيرات $س_{و، ن+1}$ ، $س_{ن+1، ر}$ ليصبح لدينا المعادلات التالية :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{ر=1}^{ن} س_{ور} + س_{و، ن+1} = ح_{و} \\ و = 1 ، 2 ، \ldots ، ن \\ \sum_{و=1}^{ن} س_{ور} + س_{ن+1، ر} = ح_{ر} \\ ر = 1 ، 2 ، \ldots ، ن \end{array}\right\} \qquad (٢٥)$$

حيث عدد الفوط التى لا يمكن إستخدامها فى اليوم (و) وتستبعد من الدورة هى $س_و$ ، ن + ١ كذلك فإن $س_{ن+١}$ ، $ز_ر$ تمثل عدد الفوط التى تم شراؤها فى اليوم ر لمقابلة الإحتياجات فى اليوم ر . وبالتالى فإن التكلفة المصاحبة لـ $س_و$ ، $_{ن+١}$ هى الصفر بينما التكلفة المصاحبة لـ $س_{ن+١}$ ، $ز_ر$ هى ا .

بفرض أن $س^{(١)}_{و ر}$ = الفوط المرتجعة من الغسيل السريع .

$س^{(٢)}_{و ر}$ = الفوط المرتجعة من الغسيل العادى ، فإن دالة الهدف تكون :

$$ع = (ا \sum_{ر=١}^{ن} س_{ن+١ ، ر}) + (ب \sum_{ر=١}^{ن} س^{(١)}_{و ر})$$

$$+ (حـ \sum_{ر=١}^{ن} س^{(٢)}_{و ر}) \qquad (٢٦)$$

والمطلوب تدنية ع وتحقيق القيود (٢٥) .

ومن الأفضل شرح كيفية تحويل مسألة متعهد الوجبات إلى مسألة نقل بالمثال التالى :

يوضح الجدول التالى إحتياجات فندق من فنادق القاهرة السياحية للفوط خلال فترة انعقاد إحدى المهرجانات العالمية التى سوف تستغرق ثمانية أيام :

اليوم	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)
إحتياجات الفوط	٢٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٠٠

وسعر شراء الفوطة = ٢٠ قرش وسعر غسيلها ٢ قرش للخدمة العادية التى تستغرق ثلاثة أيام وأربعة قروش لخدمة تستغرق يومين . والمطلوب تحديد الحل الأمثل .

خطوات الحل :

١ — جدول رقم (٢٩) يبين الإحتياجات اليومية $ك_ن$ والإحتياجات المجمعة $ج_ن$ والحد الأدنى المطلوب للفوط بفرض إستخدام الخدمة السريعة ($ج_ن$ ـ ل) . ويلاحظ من الجدول (٢٩) أننا نحتاج على الأقل إلى ١٢٠٠ فوطة لاستيفاء إحتياجات الفندق وهو أقصى قيمة د ($ج_ن$ ـ ل)

الأيام	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
$ك_ن$	$ك_١$	$ك_٢$	$ك_٣$	$ك_٤$	$ك_٥$	$ك_٦$	$ك_٧$	$ك_٨$
	٢٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٠٠
$ج_ن$	٢٠٠	٦٠٠	٩٠٠	١٢٠٠	١٧٠٠	٢٤٠٠	٢٨٠٠	٣٤٠٠
$ج_ن$ ـ ل	٢٠٠	١٠٠	٢٠٠	٦٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠	١٥٠٠

جدول (٢٩)

٢ — فى الخطوة الثانية ننشىء جدولا من (ن + ١) × (ن + ١) خانة مبينا عليه الاحتياجات المطلوبة كما هو واضح فى جدول (٣٠) . وشكل الجدول ناتج من أنه عتبارا من اليوم الثالث $ر$ = ٣ . يمكن استلامنا لكمية الفوط المرسلة فى و = ١ للغسيل بالخدمة السريعة ولهذا فإن تكلفة الخلايا التى لها مدلول (و ، و — ٢) تكون مساوية ٤ وهى تكلفة الغسيل بالخدمة السريعة . وفيما عدا ذلك تكون التكلفة هى تكلفة الخدمة العادية أى تكون مساوية ٢ . والصف الأول يحتوى تكلفة الفوط الجديدة لهذا فإن مجموعه هو الحد الأقصى المطلوب أى ١٢٠٠ فوطة كما يوضح الجدول (٢٩) .

ولحل مسألة المتعهد بعد تكوين الجدول (٣٠) تتبع نفس طريقة النقل التقليدية فنبدأ بالحصول على حل أساسى ممكن بإستخدام طريقة (الركن الشمالى

الشرقى) وفى حالة عدم إمكانية الوفاء بإحتياجات الفوط تستخدم فوط جديدة من الصف (ن + ١) الذى يحتوى ١٢٠٠ فوطة وتبلغ التكلفة فى هذا الصف (٢٠) ويدل ذلك على شراء فوط جديدة .

وإستخدام الكميات عند الصفوف والذى يعنى إستخدام الفوط المرسلة للغسيل فيبدأ بإستخدامنا الخدمة العادية عند الخلايا التى تكلفتها (٢) . ويوضح جدول (٣٠) الحل الإبتدائى .

٣ — فى الخطوة الثالثة يتم تحسين الحل الإبتدائى من الخطوة السابقة .

وهذا التحسين (الذى إقترحه بيل) يتم بفرض أن إضافة كمية من الفوط أكبر من الحد الأدنى يؤدى إلى تحسين الحل . فمثلا فى الحالة موضع الدراسة إذا إفترضنا ان الكمية التى سوف يتم شراؤها هى (١٢٠٠ + ص) : وبذلك يتحول الجدول (٣٠) إلى الجدول (٣١) ومقدار العائد [٥ص (٤ — ٢) + ٤ص] = ١٤ص . بينما الخسارة ٢٠ص لذلك لا يؤدى ذلك إلى تحسين فى الحل ويكون الحل الأمثل هو فى جدول (٣٠) .

١٢٠ ([illegible])

[illegible]	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
[illegible]	٢٠ (٢٠٠)	٢٠ (٤٠٠)	٢٠ (١٠٠)	٤	٢ (١٠)	٢٠ (٤٠٠)	٢٠	٢	٠	١٢٠٠
١			٤ (٢٠٠)	٢	٢	٢	٢	٢	٠	٢٠٠
٢				٤ (٢٠٠)	٢ (١٠)	٢	٢	٢	٠	٤٠٠
٣					٤ (٢)	٢	٢	٢	٠	٧٠٠
٤						٤ (٢)	٢	٢	٠	٢٠٠
٥							٤ (٤٠٠)	٢ (١٠)	٠	٥٠
٦								٤ (٥٠)	٠ (٢٠٠)	٧٠٠
٧									(٤٠٠)	٤٠٠
٨									(١٠)	٦٠٠
المتطلبات	٢٠٠	٤٠٠	٢٠	٢	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٠٠	١٢٠٠	

جدول ([illegible])

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
	٢ ٢٠٠	٢ (٤٠٠)	٢ (١٠٠+ص)	٢	٢	٢	٢	٢	٠	١٢٠٠ م
١			٧ (٢٠٠-ص)	٠ (ص)	٢	٠	٢	٢	٠	٢٠٠
٢				٤ (٢٠٠-ص)	٢ (١٠٠+ص)	٢	٢	٢	٠	٤٠٠
٣					٦ (٢٠٠-ص)	٢ (ص)	٠	٢	٠	٢٠٠
٤						٤ (٢٠٠-ص)	٠ (ص)	٢	٠	٦٠٠
٥							٤ (٤٠٠-ص)	٢ (١٠٠+ص)	٠	١٠٠
٦								٤ (٥٠٠-ص)	٠ (٢٠٠+ص)	٧٠٠
٧									٠ (٤٠٠)	٤٠٠
٨									٠ (٦٠٠)	١٠٠
	٥٠	٤٠	٧١	٢٠	٥٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٠٠	١٤٠٠	م

(جدول ٣١)

وكمثال آخر اعتبر أحد العوامل المساعدة التي تدخل في أحد الصناعات الكيماوية وتتكلف الوحده الجديدة من هذا العامل ١٢ جنيه مصرى بينما يمكن إعاده استخدامها بطريقة سريعة تتكلف خمسة جنيهات وتستغرق شهرين وأخرى تتكلف جنيهان وتستغرق ثلاثة شهور . والجدول (٣٢) يبين الاحتياجات الشهرية في العام والطلب التجميعي ويتم ح ر ـ ل .

ل ر	ل ع١	ل ع٢	ل ع٣	ل ع٤	ل ع٥	ل ع٦	ل ع٧	ل ع٨	ل ع٩	ل ع١٠	ل ع١١	ل ع١٢
	٧٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	١٠٠	٧٠	٧٠	٧٠	٨٠
ح ر	٧٠	١٤٠	٢٢٠	٣٠٠	٣٦١	٤٢٠	٥٢٥	٦٢٠	٦٩٠	٧٦٠	٨٢٠	٩٠٠
ح ر ل	٧٠	١٤٠	١٦٠	١٢٠	١٢٥	١٢٠	١٦٠	١٩٠	١٧٠	١٤٥	١٤٥	١٤٠

جدول (٣٢)

ويلاحظ من جدول (٣٢) أن الاحتياجات القصوى (١٩٠) ــ ومن جدول

(٣٢) يمكننا تكوين جدول النقل (٣٣) الذى يحتوى أيضا على الحل الابتدائى — والاختبار ما إذا كان الحل حلا أمثل ندرس تأثير زيادة كمية العامل المساعد عن الحد الأدنى وهو ١٩٠ بالقيمة ص وبالتالى نضع فى الخانة (٦٠٣) الكمية (٢٠ + ص) بدلا من (٢٠) فى الجدول (٣٢) ويؤثر ذلك على كل المسار بالزيادة والطرح حتى نهاية الجدول ويكون مقدار العائد هو :

ص [٩ (٥ — ٢) + ١ × ٥] = ٣٢ ص

بينما مقدار التكلفة هى (١٢ص) وهى ثمن كمية العامل المساعد الجديدة وبالتالى يكون صافى العائد ٣٢ص — ١٢ ص = ٢٠ ص ومعنى هذا أنه بإضافة الكمية ص يمكن توفير مبلغ ٢٠ ص — ولتحديد قيمة ص تتبع المسار ونختار قيمة ص بحيث لا تظهر كميات سالبة فى الحل موضع الدراسة ليتحقق ذلك فى حالة ص = ٢٠ — ومنها يكون جدول الحل الأمثل هو الجدول (٣٤) .

(٤ — ٦ — ٣) مسألة تخصيص الأعمال: فى هذه المسألة المطلوب تخصيص مجموعة من العمال إلى مجموعة من الأعمال بحيث يخصص كل عامل إلى أحد الأعمال ويتوفر فى معلومات المسألة كفاءة الانجاز لكل عامل لمجموعات الأعمال المتواجده أو العائدة المتوقع نتيجة لتخصيص العامل إلى أحد الأعمال والهدف هو جعل مؤشر الانجاز أو العائد أكبر ما يمكن .

وليس من الضرورى أن يكون العمل محتاج إلى عامل واحد حيث عاده يمكن تقسيم العمال إلى (مجموعات عمل) متميزه بحيث تؤدى كل مجموعة عمل أحد الأعمال ويكون لدينا مسألة تخصيص الأعمال بنفس المفهوم السابق .

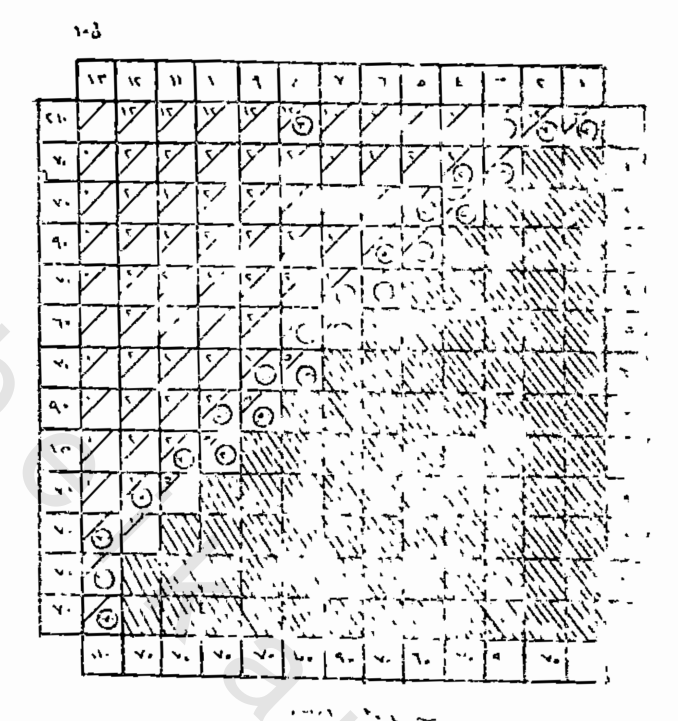
كما أنه من الممكن أن تكون مسألة التخصص خاصة بالمعدات وليس بالأفراد • مثال ذلك تخصيص المحاريث الميكانيكية ذات المواصفات المختلفة في حرث أراضى ذات طبيعة مختلفة (رملية — طفلية — جيرية) وبالتالى تختلف كفاءة الحرث بإختلاف نوع المحراث ونوع التربة •

على أى حال فإن هذه المسألة عبارة عن حالة خاصة من نماذج النقل التقليدية حيث تكون المتطلبات والإحتياجات هى الوحدة ويظهر فى كل عامود أو صف مدخل واحد . بينما جميع الخلايا الأخرى مداخلها صفر .

ونظراً لأنه يتم تخصيص فرد واحد لعمل واحد فإن عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة أى م = ن • ونظرا لأنه يتم تخصيص فرد واحد لعمل واحد فإن عدد الخلايا المشغولة = ن • فإذا استرجعنا أن الحل الأساسى يجب أن

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	
٠	١٢ ([illegible])	١٢ ([illegible])	١٢ ([illegible])	١٢	١٢	١٢	١٢	١٢ ([illegible])	١٢	١٢	١٢	١٢	٠	١٩٠
١			٥ ([illegible])	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٠	٧٠
٢				٥ ([illegible])	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٠	٧٠
٣					٥ ([illegible])	٢ ([illegible])	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٠	٦٠
٤						٥ ([illegible])	٢ ([illegible])	٢	٢	٢	٢	٢	٠	٧٠
٥							٥ ([illegible])	٢	٢	٢	٢	٢		٦٠
٦								٥ ([illegible])	٢	٢	٢	٢		٧٠
٧									٥ ([illegible])	٢ ([illegible])	٢	٢	٠	٩٠
٨										٥ ([illegible])	٢ ([illegible])	٢	٠	١٠٠
٩											٥ ([illegible])	٢ ([illegible])	٠	٧٠
١٠												٥ ([illegible])	([illegible])	٧٠
١١													([illegible])	٧٠
١٢													([illegible])	٧٠
	٧٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	١٠٠	٧٠	٧٠	٧٠	٧٠	١٩٠	

جدول (٦٢)



يحتوى على (٢ن — ١) من الخلايا المشغولة لخلصنا أن مسائل التخصيص لها أعلى درجات التفسخ أو الاستحالة فى الحل .

إلا أنه نظراً للطبيعة الخاصة للمسألة فإن طرق الحل غالبا تقع فى نطاق مبسط .* حيث استخدم كوهين الخاصية الآتية [إذا كانت عناصر مصفوفة يمكن تصنيفها إلى مجموعتين متميزتين باستخدام خاصية (هـ) - فإن الحد الأدنى لعدد الخطوط التى لا تحتوى العناصر ذات الخاصية (هـ) يكون مساويا للحد الأقصى من الخطوط تحتوى العناصر ذات الخاصية (هـ) بحيث لا يقع إثنان على نفس الخط] وهى الخاصية التى أوضحها فربونيوس عام ١٩١٢ .

(*) من الاضافات الهامة فى هذا المجال

(1) P.S Dwyer " The Solution of Hitchcock Transportation Problem With Amethod of Reduced Matrix » Dec. 1955 Univ Machigan Statistical LaB.

(2) H. Kuhn « The Hungarian Method For Assignment Problem» Naval Res. Logistics №2. 1955

ومن المناسب أن نشرح هذ الطريقة بمثال : يقيس أحد المديرين كفاءه العاملين لديه بمقياس كفاءه يجمع بين :

(١) الخبره (٢) المؤهل (٣) الشخصيه (٤) الفاعلية

وبالرغم من أن العنصرين (١) ، (٢) يمكن تحديدهم وبالتالى يسهل تقييمهم إلا أنه بالنسبة للعنصرين (٣) ، (٤) فالموضوع يحتاج للدراسة ميدانيه وتخضع لكثير من الجدل .

على أى حال فإن مديرنا هذا أستطاع أن يستخدم مقياس كفاء كما يلى :

$$\text{هـ}_{\text{و}} = \text{ا}_{\text{و}} + \text{ب}_{\text{و}} + \text{حـ}_{\text{و}} + \text{ء}_{\text{و}}$$

$\text{هـ}_{\text{و}}$ = مقياس كفاءه العامل (و) ، $\text{ا}_{\text{و}}$ = خبره العامل (هـ) ، $\text{ب}_{\text{و}}$ = مؤهل العامل (و)

$\text{حـ}_{\text{و}}$ = مقياس شخصية العامل (و) ، $\text{ء}_{\text{و}}$ = مقياس فاعلية العامل (و)

بفرض أن المدير قد حدد مستوى الانجاز المسموح به للعمل (ن) بالقيمة $\text{ص}_{\text{ن}}$ فاذا الفرق

$$\text{ص}_{\text{ن}} - \text{هـ}_{\text{و}} = \text{حَـ}_{\text{و ن}} \qquad (٢٧)$$

يعبر عن القصور المتوقع نتيجة تكليف العامل (و) بالعمل ن — والجدول (٣٥) يبين قيم $\text{حَـ}_{\text{و ن}}$ والقيم السالبة تدل على قصور عن المستوى المحدد بينما القيم الموجبة تدل على تعدى الكفاءه للمستوى المحدد . والقيمة صفر تدل أن العامل يناسب تماما العمل الموضوع فيه .

لتوحيد الاشارة فى الجدول (٣٥) تنقل نقطة الأصل إلى أكبر قيمة أى (٢٥) ثم تكون الجدول (٣٦) بالقيم .

$$\left| \text{حَـ}_{\text{و ن}} - ٢٥ \right| = \text{حـ}_{\text{و ن}}$$

والمطلوب توزيع العمال على الاعمال لتقليل مجموع القصور إلى أدنى قيمة ممكنة — وتتبع الخطوات التالية :

١ — نقوم بطرح أقل رقم فى كل صف من جميع الأرقام فى الصف

٢ — نحدد أقل عدد من الخطوط التى تمر بجميع الاصفار فى الجدول (الخاصية هـ)

٣ — إذا كان عدد الخطوط يساوى ن أى عدد الرجال أو الاعمال (أقصى عدد من الخطوط) يكون الحل أمثل

٤ — إذا لم يتحقق هذا الشرط نختار أقل قيمة فى الجدول والتى لا تمر بها خطوط ونطرحها من كل قيم الجدول ونضيفها على نقط تقاطع الخطوط .

٥ — نكرر العمل ابتداء من الخطوة (٢)

الرجال	الأعمال						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
١	١٥	٥	٢٠	صفر	٥٠	١٥	١٠
٢	٢٠	٢٠	٥	٥	١٥	صفر	٥٠
٣	١٥	٢٠	٥	١٠	٥٠	٥	١٥
٤	١٥	٢٥	٥٠	صفر	١٠	٥	صفر
٥	٥	٢٥	١٠	١٥	١٠	٢٠	٥
٦	١٠	١٠	١٠	٢٠	١٠	١٠	١٠
٧	١٥	١٠٠	٥	٢٥	٥	٢٥	٢٥

جدول (٢٥)

الرجال \ الاعمال	I	II	III	IV	V	VI	VII
١	١٠	٢٠	٥	٢٥	٢٠	١٠	١٥
٢	٥	٥	٢٠	٢٠	١٠	٢٥	٢٠
٣	١٠	٥	٢٠	٢٥	٢٠	٢٠	١٠
٤	١٠	صفر	٢٠	٢٥	١٥	٢٠	٢٠
٥	٢٠	صفر	٥	١٠	١٥	٥	٢٠
٦	١٥	١٥	١٥	٥	١٥	١٥	١٥
٧	١	٢٥	٢٠	صفر	٢٠	صفر	صفر

جدول (٢٦)

الرجال \ الاعمال	I	II	III	IV	V	VI	VII
١	٥	١٥	صفر	٢٠	٢٥	٥	١٠
٢	صفر	صفر	١٥	١٥	٥	٢٠	٢٥
٣	٥	صفر	١٥	٢٠	٢٥	١٥	٥
٤	١٠	صفر	٢٠	٢٥	١٥	٢٠	٢٥
٥	٢٠	صفر	٥	١٠	١٥	٥	٢٠
٦	١٠	١٠	١٥	١٠	صفر	١٠	١٠
٧	٥	٢٥	٢٠	صفر	٢٠	صفر	صفر

جدول (٢٧)

الرجال \ الاعمال	I	II	III	IV	V	VI	VII
١	٥	٢٠	صفر	٢٠	٢٥	٥	١٠
٢	صفر	٥	١٥	١٥	٥	٢٠	٢٥
٣	صفر	صفر	١٠	٢٥	٢٠	١٠	صفر
٤	١٥	صفر	٢٥	٢٠	١٠	١٥	٢٠
٥	٢٠	صفر	صفر	٥	١٠	صفر	١٥
٦	٥	١٥	١٠	١٠	صفر	١	١٠
٧	١٠	٤٠	٢٠	صفر	٢٠	صفر	صفر

جدول (٢٨)

الرجال \ الاعمال	I	II	III	IV	V	VI	VII
			١				
٢	١						
٣							١
٤		١					
٥						١	
٦					١		
٧				١			

جدول (٢٩)

جدول (٣٧) يبين الخطوط ه الاولى وفيه أقل عدد من الخطوط التى تمر بـ بالأصفار هو خمسة خطوط — ولما كانت ن = ٧ > ٥ لذلك فالحل ليس أمثل لذلك تطبيق الخطوه (٤) حيث أقل قيمة فى الخلايا التى لا تمر بها خطوط هى (٥) نطرح هذه الخمسة من كل الخلايا التى لا تمر بها خطوط ونضيفها على نقط التقاطع فنحصل على جدول (٣٨) ، حيث نجد أن اقل عدد من الخطوط يمر بالأصفار هو ٧ لذلك فالجدول (٣٨) يعطى حلا أمثل — ولتحديد الخلايا التى تخصص فيها اربعل الأعمال نلاحظ الآتى :

الصف (١) يحتوى على صفر واحد لذلك فالخانة الوحيده التى يمكن استخدامها هى (١ ، III) — وكذلك الصف الثانى عند (٢ ، I) والصف الرابع عند (٤ ، II) وبالنسبة للعامود الرابع فالخانة لوحيدة المتاحة عند (٧ ، IV) وكذلك بالنسبة للعامود الخامس عند (٦ ، V) — وهكذا باستخدام هذه الخانات يتحتم علينا استخدام الاصفار عند (٣ ، IIV) ، (٥ ، IV) لتحقيق شرط تخصيص عامل واحـــد . وبذلك يكون الحل الأمثل موضح فى جدول (٣٩) .

(٤ - ٦ - ٤) تحديد الموقع وتخصيص المواقع*

Facility Location And Allation Problem

(أ) فى حالة تحديد موقع إمكانية واحده تسمى المسألة عاده تحديد الموقع Facility Location إما إذا تعددت الامكانيات سمت :

(*) راجع فى هذا المجال

(1) F.ances R. L. & Goldsteen , j.M'' Location Theory : Aselective Bipecgraphy Jp. orsa Vol22 No 2 PP 400-4-0

(2) Ross 6. Tanh Soland R.M. Modelling Facility Problem and. Geneealisld Assigurlbwt Problems »
Management Science Vol 24 N: 3 Nw. 1977

المسألة تخصيص الواقع Location- Allocation - والمسألة تقع في نطاق - المسألة العامة للتخصيص General Assignment Problem

(GAP) — التي يمكن التعبير عنها بالنموذج التالي :

تدنيه مجـ حو ن س و ن

مستوفيا

ب و ≥ ن مجـ م و ن س و ن ≥ او

(٢٨)

مجـ س و ن = ١

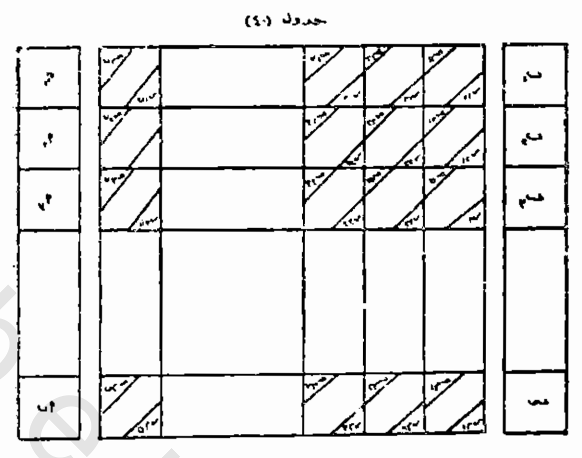
س و ن = (واحد) أو (صفر)

حيث ن = ١ ، ٢ ، .. ، ن مدلول الاعمال ، و = ١ ، ٢ ، .. ، م مدلول العمال أو مجموعات العمل

حو ن تكلفة تخصيص المجموعة (و) للعمل (ن) — م و ن الموارد المطلوبة في حالة تخصيص المجموعة و للعمل ن ، ب و ، ا و الحدود الدنيا والعليا للموارد المخصصة - أما القيد مجـ س و ن = ١ ، س و ن = ١ أو صفر فيدل على تخصيص مجموعة عمل واحده لأداء عمل واحد .

والشكل العام لهذه المسألة يوضح بالجدول التالي جدول (٤٠)

جدول (٤٠)



وسوف نتعرض فى هذا الجزء إلى مسألة ل الوسطيا (Pmediau Proplem)
حيث المطلوب اختيار ل من ن مواقع استهلاك لتكون مراكز إمداد .
(ن > ل > صفر) ـ لاتوجد قيود من أى نوع على مواقع الاستهلاك لامدادها بمراكز معينة لذلك فن المنطقى استيفاء احتياجات مواقع الاستهلاك من أقرب مراكز امداد فإذا عرفنا الآتى :

دو ر = الزمن المستغرق إذا إستخدمنا موقع الامداد و فى استيفاء احتياجات موقع الطلب ر

ت ر = التعداد أو مستوى الطلب فى المركز ر

حو ر = ت ر د و ر

س و ر = ١ إذا كان مركز الطلب ر مخصص إلى مركز الامداد منه مركز الطلب ر

س و ر = صفر فيما عدا ذلك

وليس من الضرورى أن تكون مصفوفه [ءو ن ر] مصفوفة متماثله كما أنه على وجه العموم حـ و ن ر > حـ ن ر ن لذلك فإن أى موقع استهلاك الذى هو أيضاً موقع امداد يخصص لذاته .

وفى صياغة مسأله (ل ـ الوسيطة) كمسألة تخصيص عامه فإن س و ن ر تعرف كما سبق بجمع قيم و ، ن ر = ١ ، ٢ ... ، ن ـ ومن الضرورى تحديد ما إذا كان أى من مراكز الاستهلاك (الطلب) يمكن أن يستخدم كمركز إمداد ـ ويتم ذلك بإضافة عدد ن من (الأعمال) ومجموعة عمل (عمل) واحد ـ بذلك تكون مسألة تحديد وتخصيص المواقع مناظره لمسألة تخصيص عامة بحجم م = ن + ١ ، ه = ٢ ن ولجميع قيم و > ن فإن س ن + ١ ، ن + و تعرف كما يلى :

س ن + ١ ، ن + و = ١ إذا استخدام مركز الطلب وكمركز إمداد

= صفر ما عدا ذلك

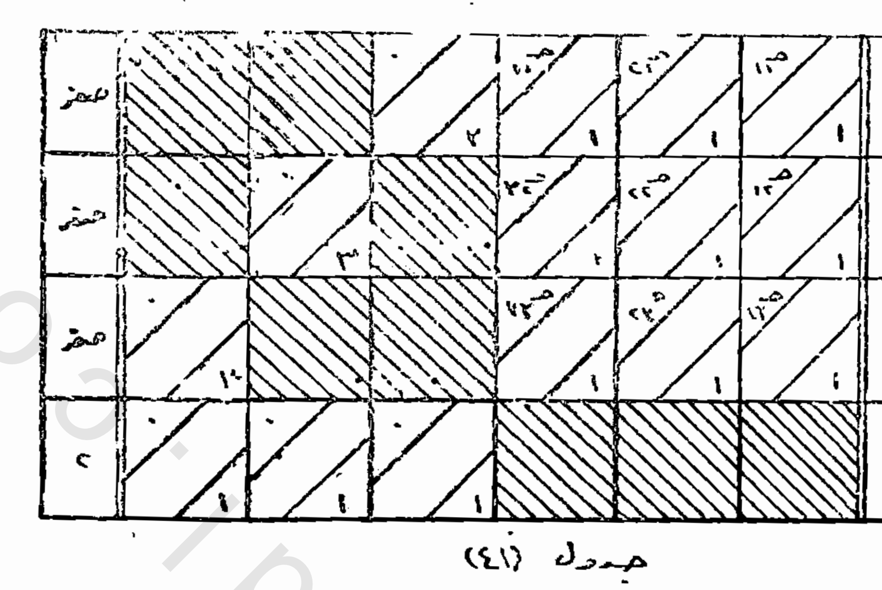
بينما س و ، ن + و = صفر إذا إستخدم مركز الطلب وكمركز إمداد

= ١ ما عدا ذلك

اى أن س ن + ١ ، ن + ١ + س و ، ن + و = ١ لجمع قيم و = ١ ، ٢ .. ، ن

وكل قيم س و ن ر ن ر > ن تساوى صفر وكل قيم س ن + ١ ، ن ر = صفر

كذلك من الضرورى أن يكون هناك عدد ل من مراكز الطلب مخصصة كمراكز إستهلاك ـ ويتم ذلك بتعريف أ و ، ب و ، م و ن ر فى النموذج (٢٨) ـ ويوضح جدول (٤١) مسأله ن = ٣ ، ل = ٢ ـ لاحظ أن حـ و ن ر ، م و ن ر = ∞ فى الخلايا المظلله .



جدول (٤١)

ومن جدول (٤١) تستطيع أن نعمم ونحدد العلاقة للمسألة العامة حيث :

$$\text{أ}_{\text{و}} = \text{صفر} \text{ ، } \text{ب}_{\text{و}} = \text{ن} \text{ ، } \text{و} = ١ \text{ ، } ... \text{ ، ن}$$

$$\text{أ}_{\text{ن}+١} = \text{ب}_{\text{ن}+١} = \text{ل}$$

$$\text{س}_{\text{و ر}} = ١ \quad \text{و ، س} = ١ \text{ ، } ... \text{ ، ن}$$

$$\text{ح}_{\text{و ، ن + و}} = \text{صفر ، } \text{س}_{\text{و ، ن + و}} = \text{ن} \qquad (٢٩)$$

$$\text{و} = ١ \text{ ، } ... \text{ ، ن}$$

$$\text{ح}_{\text{ن}+١ \text{ ، ن + و}} = \text{صفر ، } \text{س}_{\text{ن + ١ ، ن + و}} = ١$$

$$\text{و} = ١ \text{ ، } .. \text{ ، ن}$$

$$\text{ح}_{\text{و ر}} = \text{س}_{\text{و ر}} = \infty \quad \text{ماعدا ذلك}$$

هناك العديد من الطرق لحل مسألة التخصيص العامة باستخدام الحاسبات الآلية(*) — أهمها استخدام مضاعف لاجراج لتخفيض القيود :

تدنيه

$$ع = \sum_و \sum_ر هـ_{ور} س_{ور} + \sum_ر \lambda_ر (١ - \sum_و س_{ور})$$

مستوفيا

$$ب_و \geqslant \sum_ر م_{ور} س_{ور} \leqslant او \qquad (٣٠)$$

$$س_{ور} = صفر أو واحد$$

و يستخدم البرنامج تخمين ابتدائى لـ $\lambda_ر$ مساويا لأقل قيمه تاليه لقيم $هـ_{ور}$

(ii) ومن المسائل البسيطة فى مجال تحديد الموقع تلك التى تتعلق بالمفاضله بين مجموعه من المواقع البديله لإختيار أحدها كمركز امداد إضافى فى هذه الحالة لكل موقع متاح (م) تحدد التكلفة هـ م ر — ويتم حل عدد من مسائل النقل عددها (م) فى كل مره يتم تحديد الحل الأمثل ولنفرض أنه [حم] - ثم نختار م التى تحقق أقل [حم] لتكون هى الموقع المطلوب .

(٤ — ٧) مسألة النقل البينى(**) Transshipment

(*) Balachendran V. "AN Integer Generalised Transportation Model For Optimal Jop Assignment in Computer Network ,,Jr. ORSA Vol 24 1976 pp 742 - 759

راجع

(**) Orden' A. u (The Transshipment Proplem) gr Management Seicnoe Vol.2 N: 3 April 1956

أول من قدم حلا للمسألة هو الكس أوردن عام ١٩٥٠

فى مسأله النقل التقليدية كنا نتعرض لبرنامج النقل الذى يحقق تدنيه تكاليف النقل من أصول محدوده إلى غايات محدده والكمية المتواجدة عند كل أصل والكمية المطلوبة عند كل غايه وتكاليف نقل الوحده من الأصل للغاية معلومه - ولم تكن نتعرض للنقل البينى بمعنى أن كل نقطة كانت تتعامل كأصل أو كغاية فقط .

وفى حالة إمتداد المسأله لتصبح مسأله نقل بينى فإننا نسمح بأن يتم النقل خلال سلسله من النقط بدلا من تقييده من الأصول لأحد الغايات - ويتم حل مسأله النقل البينى بتحويلها بطريقه معينـــة لتصبح ملائمه للحل كمسأله نقل تقليديه .

وللوصول إلى ذلك يتم معاملة كل نقطه على أنها زوج من النقط أحدهما يقوم بعملية شحن والأخرى بعملية استقبال - وتعتبر تكلفه النقل من النقطه التى تعتبر نقطه شحن إلى ذات النقطة التى تعتبر نقطة إستقبال مساويه للصفر - ويفترض (للأغراض الحسابية فقط) أن كميه كبيره متاحة للشحن عند كل نقطة والتى يمكن اعتبارها مخزون يمكن سحبه أو تعويضه ـــ وحل مسأله النقل البينى فى الواقع يعتمد أساساً على أن السحب والتعويض لهذا المخزون يكون مناظراً تماما لعمليات النقل البينى - ولا يهمنا مقدار حجم المخزون بفرض أن هذا الحجم كافى لعمليات الشحن المرغوبة لخفض التكاليف . وفى الخطوات الحسابية يتم وضع مخزون اختيارى أكبر من المطلوب فعلا - وهذه الزيادة يتم التخلص منها فى الحل النهائى .

وفى حاله تصميم جدول النقل الجديد يتم ترتيب الجدول بحيث نبدأ أولا بالأصول ثم الغايات - وعلى أساس هذا يستبدل لمدلول س للغايه ثم بالمدلول

م + ن حيث م عدد الأصول — وإذا كانت $ا_و$ هى الكمية المتاحة عند الأصل $ر_و$ فإن $ب_{م+ن}$ الكمية المطلوبة عندالغاية $غ_{م+ن}$ — وعليه فإن

$$\sum_{و} ا_و = \sum_{ن} ب_{م+ن}$$

فإذا رمزنا بالرمز $س_{ول}$ للدلاله عن النقل من الأصل (و) إلى (ل) — وبالرمز $س_{لو}$ للنقل من ل إلى الأصل و حيث ل هنا أى غايه أو أصل — مع مراعاة أن (و) لا تساوى ل أو $س_{لل}$ = صفر .

وبنفس المفهوم فإن $س_{ل،م+ن}$ ، $س_{م+ن، ل}$ تدل على النقل من (ل) إلى الغاية (م + ن) أو من الغاية (م + ن) الى (ل) .

إن صافى الكمية التى يجب أن تستلم عند الغاية (ن) بعد كل عمليات لاستلام والشحن يجب أن تكون مساوية للكمية المطلوبة عند هذه الغاية أى $ب_{م+ن}$ — وكذلك فإن صافى الكمية المنقولة من عند الأصل (و) يجب أن تكون الكمية المطلوب نقلها من عند الأصل وهى $ا_و$

وبهذا المفهوم يمكننا الحصول على المعادلات التالية :

$$\sum_{ل=1}^{م+ن} س_{ول} - \sum_{ل=1}^{م+ن} س_{لو} = ا_و \qquad (٣١)$$

$$\sum_{ل=1}^{م+ن} س_{ل،م+ن} - \sum_{ل=1}^{م+ن} س_{م+ن، ل} = ب_{م+ن} \qquad (٣٢)$$

فإذا إفترضنا أن $ح_{هف}$ هى تكلفة النقل من هـ إلى ف

$$\text{هـ ، ف} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م} + \text{ن}$$

$$\text{، هـ لاتساوى ف}$$

فالمطلوب ايجاد قيم سهـ ف التى تحقق (٣١) ، (٣٢) وتجعل ع أقل ما يمكن

$$\text{ع} = \sum_{\text{هـ}} \sum_{\text{ف}} \text{حـ}_{\text{هـ ف}} \, \text{س}_{\text{هـ ف}} \qquad (٣٣)$$

هذه المسألة المعبر عنها بداله الهدف (٣٣) والقيود (٣١) ، (٣٢) يمكن تحويلها إلى الصورة التقليدية لمسأله النقل بالخطوات التالية :

١ — أضف وأطرح من كل قيمة (هـ) للمعادلات السابقة متغير $\text{س}_{\text{هـ هـ}}$ وتكلفته $\text{حـ}_{\text{هـ هـ}} = $ صفر

٢ — عرف العلاقات التاليه :

$$\text{س}_{\text{هـ هـ}} + \sum_{\text{ل}=١}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{ل و}} = \text{ت} \qquad (٣٤)$$

$$\text{ل} \neq \text{و} \quad \text{كذلك}$$

$$\text{س}_{\text{م}+\text{ر} ، \text{م}+\text{ر}} + \sum_{\text{ل}=١}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{م}+\text{ر} ، \text{ل}} = \text{ت} \qquad (٣٥)$$

$$\text{ل} \neq \text{م} + \text{ر}$$

وبذلك يمكن بالتعويض من المعادلات (٣٤) ، (٣٥) تحويل المعادلات (٣١) ، (٣٢) إلى الصورة التالية :

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{\text{ل}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{و ل}} & = \text{ا}_{\text{و}} + \text{ت} \\ \sum\limits_{\text{و}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{م}+\text{ر} \text{، ل}} & = \text{ت} \\ \sum\limits_{\text{ل}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{ل و}} & = \text{ت} \\ \sum\limits_{\text{ل}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{ل ، م}+\text{ر}} & = \text{ب}_{\text{م}+\text{ر}} + \text{ت} \end{array}\right\} \quad (٣٦)$$

فإذا كانت ت (والتي تعبر عن المخزون المتاح) كبيرة بقدر كاف فإن مجموعة المعادلات (٣٦) تناظر (٣١) ، (٣٢) ويمكن كتابتها على الصورة :

تدنيه :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ع} = \text{مجـ}_{\text{هـ ، ف}} \;\; \text{حـ}_{\text{هـ ف}} \;\; \text{س}_{\text{هـ ف}} \\ \text{مستوفيا} \\ \sum\limits_{\text{ف}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{هـ ف}} = \text{ل}_{\text{ف}} \\ \text{ف} = 1 \text{، ...، م} + \text{ن} \\ \sum\limits_{\text{هـ}=1}^{\text{م}+\text{ن}} \text{س}_{\text{هـ ف}} = \text{ط}_{\text{ق}} \\ \text{هـ} = 1 \text{، ...، م} + \text{ن} \\ \text{ل}_{\text{هـ}} = \text{ا}_{\text{هـ}} + \text{ت} \qquad \text{هـ} = 1 \text{، ...، م} \\ \text{ل}_{\text{هـ}} = \text{ت} \qquad \text{هـ} = \text{م} + 1 \text{، ...، م} + \text{ن} \\ \text{ط}_{\text{ق}} = \text{ب}_{\text{ق}} + \text{ت} \qquad \text{ف} = 1 \text{، ...، ن} \\ \text{ط}_{\text{ق}} = \text{ت} \qquad \text{ف} = \text{ن} + 1 \text{، ...، م} + \text{ن} \end{array}\right\} \quad (٣٧)$$

وبحل النموذج (٣٧) السابقة تكون ن الواقع قد توصلنا لحل مسألة النقل البيني : وعادة تؤخذ قيمة ت الحد الأقصى للكميات المطلوبة أى : مج ب $_ر$

لتوضيح المفاهيم السابقة سوف ندرس المثال الموضح فى جدول (٤٢) . حيث يوضح الجدول مسألة نقل من أصلين س$_١$ ، س$_٢$ وثلاثة غايات غ$_١$ ، غ$_٢$ ، غ$_٣$: ومن جدول (٤٢) جدول الحل الإبتدائى وهو أيضاً جدول الحل الأمثل .

	غ٣	غ٢	غ١		
	٢	٤	٢		
١٠٥	٢ / ٥	٤ / (٤٠)	٢ / (٦٠)	س١	صفر
١٥٠	١ / (١١٠)	٢ / (٤٠)	٤ / ب	س٢	١٠
	١١٠	٨٠	٦٠		

جدول (٤٢)

إذا أضفنا إلى المسألة السابقة إمكانية النقل البينى لأصبح لدينا الجدول (٤٣) [مع ملاحظة أن قيم تكلفة النقل من الأصل إلى الأصول أو من الغايات إلى الغايات بفرض معرفتها كما هو واضح من الجدول]

ل ه	غ٣	غ٢	غ١	س٢	س١		
	٢٠	١٠	٢٠	٦٠			
٢٥	٢ / (١٠٠)	٤ / ٥٠	٢ / ٥٠	١ / ٧٠	(٢٥٠)	س١	
٤٠٠	١ / ٢	٢ / ٢	٤ / (١٥٠)	٠ / (٢٥)	٢ /	س٢	١
٢٥٠	٢ / ٢٠	١ / (٩٠)	(١٦٠)	٢ / ٦٠	١ / ١	غ١	٢
٢٥٠	٢ / ١٠	(٢٤٠)	٢ / ٤٠	١ / ٦٠	٢ / ١٠	غ٢	١
٢٥٠	٠ / (٢٥٠)	١ / ٤٠	٤ / ٨٠	١ / ٩٠	١ / ٢٠	غ٣	٢
	٢٦٠	٢٢٠	٢١٠	٢٠٠	٢٥٠	ل ف	

جدول (٤٣)

ويلاحظ فى جدول (٤٢) أننا إجرينا التحويلات التالية :

١ — أن التكلفة حـ ل ل = صفر (تكلفة النقل من الأصل أو الغاية ذاتها)

٢ — ت = مج ب ر = ٦٠ + ٨٠ + ١١٠ = ٢٥٠

٣ — ك١ = ١١ + ت = ١٠٠ + ٢٥٠ = ٣٥٠

ك٢ = ١٢ + ت = ١٥٠ + ٢٥٠ = ٤٠٠

كم + ن = ت = ٢٥٠ = ك٣ = ك٤ = ك٥

٤ — ط١ = ط٢ = ٢٥٠

طم+١ = ط٣ = ت + ل١ = ٢٥٠ + ٦٠ = ٣١٠

طم+٢ = ط٤ = ت + ب٢ = ٢٥٠ + ٨٠ = ٣٣٠

طم+٣ = ط٥ = ت + ب٣ = ٢٥٠ + ١١٠ = ٣٦٠

٥ — ويلاحظ أن الحل الأساسى يحتوى على عدد من الخلايا = ٢(م + ن) — ١ = ٢ (٢ + ٣) — ١ = ٩ ولكن فى الحل النهائى يتم إهمال الخلايا القطرية والتى عددها (م + ن) بذلك يكون الحل الحل محتويا على م + ن — ١ = ٢ + ٣ = ٤ كما فى الجدول (٤٢) . بعد ذلك يتم الحل بإستخدام طريقة النقل التقليدية . من (٤٣) الحل الإبتدائى والجداول (٤٤) ، (٤٥) ، (٤٦) ، (٤٧) خطوات تحسين الحل للوصول للحل الأمثل وقد إستخدمنا طريقة جمع أسعار ظل الصفوف والأعمدة .

جدول (٢٤٤)

		س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣	
		٠	-٤	٠	-١	-٢	
٠	س١	(٢٥٠)	١ / -٥	٣ / -٣	٤ / -٥	٢ / (١٠٠)	٢٥٠
٤	س٢	٣ / ٢	٠ / (٢٥٠)	٤ / (٦٠)	٣ / (٩٠)	١ / ١	٤٠٠
-	غ١	١ / ١٠	٢ / ٦٠	٠ / (٢٥٠)	١ / -٢	٣ / -٥	٢٥٠
١	غ٢	٢ / -١٠	١ / -٤	٣ / -٢	٠ / (٢٤٠)	٣ / (١٠)	٢٥٠
٢	غ٣	١ / -٣	١ / -٧	٤ / -٦	١ / -٣	(٢٥٠)	٢٥٠
		٢٥٠	٢٥٠	٢١٠	٢٢٠	٢٦٠	

جدول (٢٤٥)

		س١	س٢	غ١	غ٢	غ٣	
		٠	١	٥	٤	٢	
٠	س١	٠ / (٢٥٠)	١ / ٠	٣ / ٢	٤ / ٠	٢ / (١٠٠)	٢٥٠
-١	س٢	٢ / -٣	٠ / (٢٥٠)	٤ / (٦٠)	٣ / (٨٠)	١ / (١٠)	٤٥٠
-٥	غ١	١ / ٦٠	٢ / ٦٠	٠ / (٢٥٠)	١ / -٢	٣ / -٤	٢٥٠
-٤	غ٢	٢ / -٦	١ / -٤	٣ / -٢	٠ / (٢٥٠)	٣ / -٥	٢٥٠
-٢	غ٣	١ / -٣	١ / -٢	١ / ٢	٤ / -٢	(٢٥٠)	٢٥٠
		٢٥٠	٢٥٠	٢١٠	٢٢٠	٢٦٠	

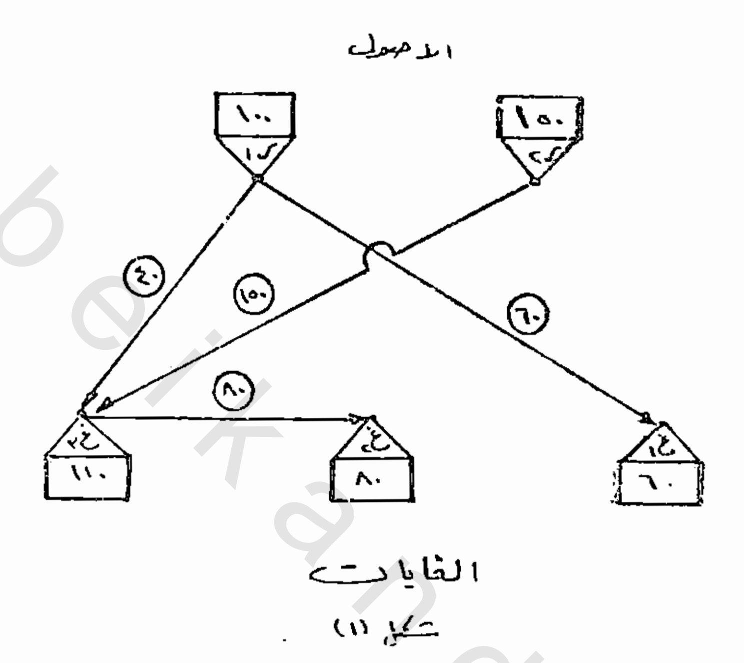
جدول (١٢٦)

	٢	٤	٧	١	٠		
	غ٣	غ٢	غ١	س٢	س١		
٢٥٠	٢ / (٤٠)	٤ / ١	٢ / (٦٠)	١ / ٠	٠ / (٢٥٠)	س١	٠
٤٠٠	١ / (٧٠)	٢ / (٨٠)	٤ / ٠	٠ / (٢٥٠)	٢ / -٢	س٢	-١
٢٥٠	٢ / -٤	١ / ٠	٠ / (٢٥٠)	٢ / -٤	١ / -٤	غ١	-٢
٢٥٠	٢ / -٥	٠ / (٢٥٠)	٢ / -٤	١ / -٤	٢ / -٦	غ٢	-٤
٢٥٠	٢ / (٢٥٠)	١ / ١	٤ / -٢	١ / -٢	١ / -٢	غ٣	-٢
	٢٦٠	٣٢٠	٢١٠	٢٥٠	٢٥٠		

جدول (١٢٧)

	٢	٧	٧		٠		
	غ٣	غ٢	غ١	س٢	س١		
٢٥٠	٢ / (٤٠)	٤ / -١	٢ / (١)	١ / -١	٠ / (٢٥٠)	س١	٠
٤٠٠	١ / (١٥٠)	٢ / ١٠	٤ / ٢٠	٠ / (٢٥)	٢ / -٢	س٢	-١
٢٥	٢ / -٤	١ / -١	٠ / (٢٥)	٢ / -٤	١ / -٤	غ	-٢
٢٥	٢ / -٤	٠ / (٢٥)	٢ / -٢	١ / -٢	٢ / ٥٠	غ٢	-٢
٢٥٠	([illegible])	١ / (٨٠)	٤ / -٢	١ / -٢	١ / -٢	غ٣	-٢
	٢٦٠	٢٢	٢١٠	٢٥٠	٢٥٠		

ويوضح شكل (١) برنامج النقل المبنى الذى وصلنا إليه من الجدول (٤٧) حيث توضح الأسهم مسار النقل



شكل (١)

والكميات التى على الأسهم الكميات المنقولة — تكلفة النقل الكلى فى هذا البرنامج ٤٩٠ جنيه بينما البرنامج فى جدول (٤٢) التكلفة ٦٧٠ جنية .

(٤ — ٨) مسأله النقل مقيـــده التدفقات*

Capacitated - Transportation Prop'em

(*) راجع

(1) Wagner . H. M. « On Aclass of Capacitated Transportation Proplem » gr. Management Science VL5 №3 1959

(2) Ford & Fulkerson " Oprimal Dual Algorithm For the Capacitated Hitchcock Proglem Naval Res Iog· №4 1957

(من المسائل الهامة فى مجال النقل المسألة التى يطلق عليها مسألة هيتشكوك المقيده — والتى يمكن النص عليها رياضيا كما يلى :

المطلوب تدنيه برنامج النقل

$$\text{ع} = \sum\sum \text{ح}_{\text{ور}}\ \text{س}_{\text{ور}}$$

باختيار قيم $\text{س}_{\text{ور}}$ التى تحقق الشروط التالية

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{أ}_{\text{و}} \qquad (٣٨)$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ور}} = \text{ب}_{\text{ر}}$$

$$\text{ى}_{\text{ور}} \geq \text{س}_{\text{ور}} \geq \text{صفر}$$

أى أن مسألة النقل المقيده هى مسأله نقل عادية بإضافة القيود على التدفقات (الكميات المنقوله)

$$\text{ى}_{\text{ور}} \geq \text{س}_{\text{ور}} \geq \text{صفر}$$

يمكن حل مسأله النقل المقيده على أنها مسألة نقل عادية إذا إضفنا المعادلة

$$\text{س}_{\text{ور}} + \text{ص}_{\text{ور}} = \text{ى}_{\text{ور}} \qquad (٣٩)$$

الدلاله على الحدود القصوى للتدفقات — ولكن العيب الرئيسى لهذا الأسلوب هو زيادة أبعاد مسألة النقل — على سبيل المثال إذا كان لدينا مسألة تحتوى على ١٥ أصل ، ٢٠ غاية — فعدد القيود فى المسألة العادية يكون ٢٥ قيد وعدد المجاهيل

س و ن ر يكون مساويا ٣٠٠ — فى حين أن استخدام القيد (٢٩) يحول المسألة إلى مسألة نقل تحتوى على :

٣٠٠ + ٣٥ = ٣٣٥ قيد

٣٠٠ × ٢ = ٦٠٠ مجهول ، س و ن ر ، ص و ن ر

وللتغلب على ذلك استحدث دانتزج طريقة أفضل حيث قسم المتغيرات إلى

(أ) متغيرات أساسيه عددها (م + ن — ١) بقيم ى و ن ر > س و ن ر > صفر

(ب) متغيرات غير أساسية بقيم س و ن ر = صفر

(ح) متغيرات غير أساسية بقيم س و ن ر = ى و ن ر

ثم يتم حساب أسعار الظل للصفوف والاعمدة ط و ، ق ن ر

ح و ن ر = ط و + ق ن ر

للمتغيرات الأساسية — وتتحدد شروط الحل الأمثل كالآتى :

١ — ط و + ق ن ر ⩾ ح و ن ر لجميع المتغيرات التى لها س و ن ر = صفر

٢ — ط و + ق ن ر ⩽ ح و ن ر لجميع المتغيرات التى لها س و ن ر = ى و ن ر

فإذا كانت س و ن ر لا تحقق شروط المثليه المنصوص عليها فى (١) ، (٢) يمكن تحسين الحل بزيادة أو نقص قيم س و ن ر — إلى أن تصل فيه س و ن ر المحلية أو غيرها الحدود الدنيا أو العليا أى س و ن ر = صفر او س و ن ر = ى و ن ر حيث فى هذه الحالة تستبعد هذه المتغيرات من الأساسية — ويتكرر العمل ع

والمسألة الثنائية لمسألة النقل المقيده والمعبر عنها فى النموذج (٣٨) هى :

تعظيم ع = مجـ ط و ا و + مجـ ق ر ب ر + مجـ هـ و ر ى و ر
مستوفيا

ط و + ق ر + هـ و ر ≥ حـ و ر

هـ و ر ≥ صفر   (٤٠)

ط و ، ق ر غير مقيده الاشارة

(٤ — ٩) مسألة النقل متعددة الأبعاد

مسألة النقل التى تم دراستها حتى الآن يمكن إعتبارها مسألة نقل ثنائية الأبعاد . وفى بعض التطبيقات نواجه مجالات يمكن اعتبارها مسائل نقل متعدد الأبعاد حيث تكون الكميات س و ر ... ى بدلا من س و ر . وسوف نناقش هنا مسألة النقل ثلاثيه الابعاد .

أفرض أنه لدينا شركة لها عدد من المصانع يرمز لها بالمدلول (و) حيث و = ١ ، ... ، ص — وأن المصانع تنتج أنواعا من المنتجات مدلولها هـ حيث هـ = ١ ، ... ، ل وأنها تقوم بتوزيع هذه المنتجات على مناطق بيع مدلولها ر ، ر = ١ ، ... ، ن بحيث أن

س و ر هـ = الكمية من المنتج هـ من المصنع (و) المنقولة لمنطقة البيع ر

فى هذه الحالة يمكن اعتبار مسألة النقل موضع الدراسة على الصورة التالية :

راجع

Dantzig " Recent Advance In Linear Programming" Jr. Management Science № 2 1956 pp 131 - 144

تدنية :

$$ع = \sum_{و} \sum_{ر} \sum_{هـ} ح_{ورهـ} \, س_{ورهـ} \qquad (41)$$

مستوفيا

$$\sum_{و=1}^{م} س_{ورهـ} = أ_{رهـ} \quad سروره$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{ورهـ} = ب_{وهـ}$$

$$\sum_{هـ=1}^{ل} س_{ورهـ} = د_{ور}$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} أ_{رهـ} = \sum_{و=1}^{م} ل_{وهـ} \qquad (42)$$

$$\sum_{هـ=1}^{ل} ب_{وهـ} = \sum_{ن=1}^{ن} د_{ور}$$

$$\sum_{و=1}^{م} د_{ور} = \sum_{ر=1}^{ن} أ_{رهـ}$$

والحل الأساسى فى هذه الحالة يحتوى على عدد من المتغيرات يساوى ل م ن − (ل م + م ن + ل ن) + (ل + م + ن) − ١ ولا يوجد حتى الآن أسلوب عام يمكن به حل هذا النوع من المسائل .

قيود مسألة النقل الثلاثية الابعاد كما هو وارد فى (٤٢) تعبر عن حاصل جمع فى المستويات الثلاثة المكونة لمجسم مسألة النقل — على أنه قد تكون طبيعة المسألة تختص بجمع محورى على المحاور الثلاثة — وفى هذه الحالة تكون القيود على الصورة التالية :

(٤٣)

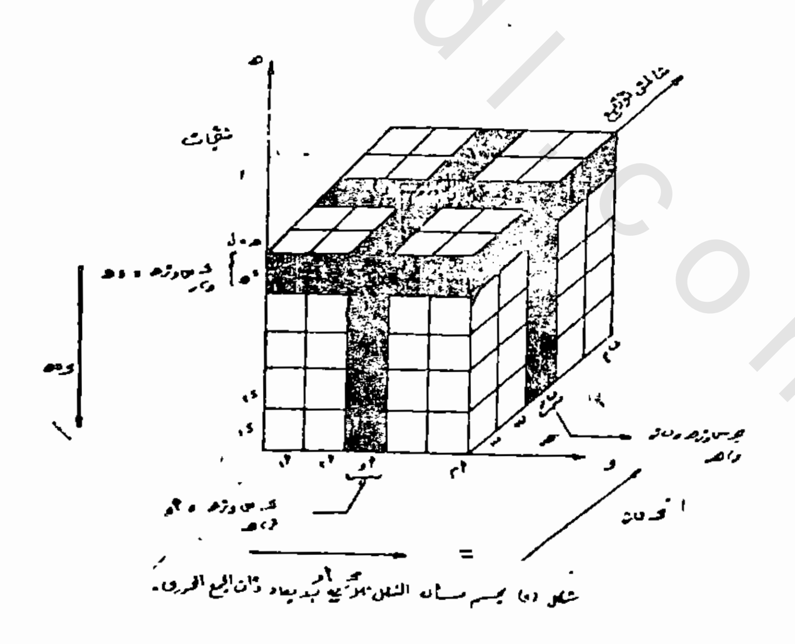
مجـ هـ ، ن س و ن هـ = ا و

مجـ و ، ل س و ن هـ = ب ن

مجـ و ، ن س و ن هـ = ء ل

مجـ و ا و = مجـ ن ب ن = مجـ ل ء ل = ف

ويمكن توضيح مسألة النقل الثلاثية ذات الجمع المحورى فى شكل (٢)



شكل (٢) مجسم مسألة النقل ثلاثية الأبعاد ذات الجمع المحورى.

(٤ — ١٠) مسألة النقل العامة (*) :

إذا إعتبرنا مسألة برمجة خطية على الصورة :

تدنيه :

$$ع = \sum_{و} \sum_{ن} ح_{ون} \, س_{ون}$$

مستوفيا

$$\sum_{ن} د_{ون} \, س_{ون} \pm س_{هو} = أ_{و}$$

$$\sum_{و} س_{ون} = ب_{ن} \qquad (٤٤)$$

$$س_{ون} \ ، \ س_{هن} \geqslant صفر$$

حيث $س_{هن}$ متغيرات عاطلة

فإننا سوف نلاحظ مباشرة أن النموذج (٤٤) يختلف عن نموذج النقل في وجود المعاملات $د_{ون}$. ولحل النموذج (٤٤) يمكن إستخدام طريقة السمبلكس إلا أننا أيضاً يمكننا إستخدام هذا التناظر بين شكل النموذج ونموذج النقل . حيث يمكننا عمل جدول النقل المعدل التالي :

(*) رجعنا أساسا في البند إلى :

G. Hadly «Linear Programming» Addison. Welsly ,1973. pp 314 - 322

(٤٨)

ومن المفيد أن ندرس المسألة الثنائية لنموذج النقل العام (٤٤) التي يمكن التعبير عنها كما يلي :

المعالم :

$$\text{ع} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ط}_{\text{و}}\,\text{ا}_{\text{و}} + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}_{\text{ر}}$$

مستوفيا

$$\text{ط}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{ر}} \leqslant \text{ح}_{\text{ور}} \qquad (٤٥)$$

$$\text{و} = ١ ، ٠٠٠ ، \text{م}$$

$$\text{ر} = ١ ، ٠٠٠ ، \text{ن}$$

$$\pm\, \text{ط}_{\text{و}} \geqslant \text{صفر}$$

حيث يتضح أنه لأى حل إبتدائى أساسى يحتوى على (م + ن) من المتغيرات يكون الشرط :

$\text{د}_{\text{ور}}\ \text{ط}_{\text{و}}\quad \text{ق}_{\text{ر}} = \text{ح}_{\text{ور}}$	للمتغيرات الهيكلية	(٤٦)
$\text{ط}_{\text{و}} = \text{صفر}$	للمتغيرات العاطلة	

ومنها نحصل على قيم $\text{ط}_{\text{و}}$ ، $\text{ق}_{\text{ر}}$

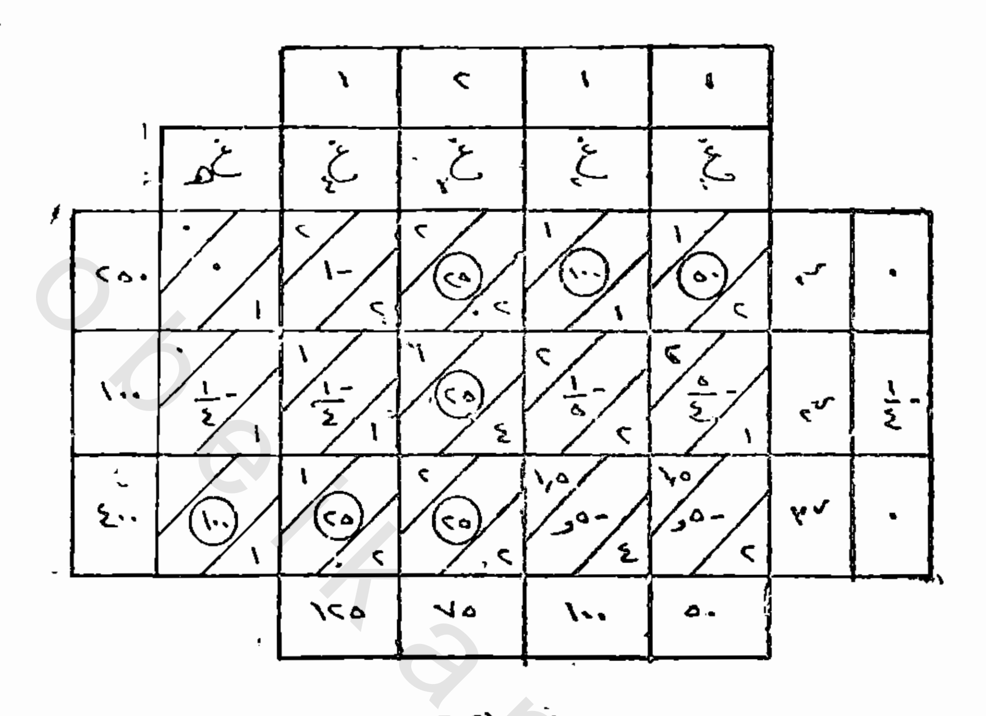
ولحساب ($\text{ع}_{\text{ور}}$) للخلايا الغير مشغولة نستخدم قيم $\text{ط}_{\text{و}}$ ، $\text{ق}_{\text{ر}}$ السابقة والتعويض فى :

$\text{ع}_{\text{ور}} = \text{د}_{\text{ور}}\ \text{ط}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{ر}}$	المتغيرات الهيكلية	(٤٧)
$\text{ع}_{\text{ور}} = \pm\ \text{ط}_{\text{و}}$	المتغيرات العاطلة	

ومنها نحصل على المقيات $\text{ع}_{\text{ور}} - \text{ح}_{\text{ور}}$

إذا كانت $\qquad \text{ع}_{\text{ور}} - \text{ح}_{\text{ور}} \geq \text{صفر}$ كان الحل أمثل .

ولتوضيح المفاهيم السابقة سوف ندرس مسألة النقل العامة الموضحة فى جدول (٤٩) :



u_i	المصدر	$غ_1$	$غ_2$	$غ_3$	$غ_4$	$غ_5$	العرض
	v_j	٤	١	٢	١		
٠	$س_1$	١ ، (٥٠) ، ٢	١ ، (١٠٠) ، ١	٢ ، (٢٥) ، ٢	٢ ، ١- ، ٢	٠ ، ٠ ، ١	٢٥٠
$-\frac{1}{4}$	$س_2$	٢ ، $-\frac{5}{4}$ ، ١	٢ ، $-\frac{1}{5}$ ، ٢	٦ ، (٢٥) ، ٤	١ ، $-\frac{1}{2}$ ، ١	٠ ، $-\frac{1}{4}$ ، ١	١٠٠
٠	$س_3$	٧٥ ، -٥,٥ ، ٢	١,٥ ، -٥,٥ ، ٤	٢ ، (٢٥) ، ٢	١ ، (٢٥) ، ٢	٠ ، (١٠٠) ، ١	٤٠٠
	الطلب	٥٠	١٠٠	٧٥	١٢٥		

جدول (٤٩)

<u>الحصول على حل إبتدائى :</u> فى جدول (٤٩).

$$س_{11} = \text{أدنى} \left[ب_1 ، \frac{أ_1}{ى_{11}} \right] = \text{أدنى} \left[٥٠ ، \frac{٢٥٠}{٢} \right] = ٥٠$$

نظراً لعدم استنفاذ الكمية المتاحة عند المصدر ($س_1$) التى يتبقى منها ٢٥٠ − ٢ × ٥٠ = ١٥٠ فإن :

$$س_{21} = \text{أدنى} \left(ب_2 ، \frac{١٥٠}{ى_{21}} \right) = \text{أدنى} \left[١٠٠ ، \frac{١٣٥}{١} \right] = ١٠٠ ،$$

ويتبقى عند المصدر $س_1$ الكمية ١٥٠ − ١٠٠ = ٥٠ .

وبذلك تكون $س_{٣١}$ = أدنى [$ت_{٣}$ ، $\frac{٥٠}{ى_{٣١}}$] = أدنى ٧٥ ، $\frac{٥٠}{٢}$] = ٢٥

وباستنفاذ الكمية عند $م_{١}$ تتحرك أسفل $غ_{٣}$ لتحديد $س_{٣٢}$.

$س_{٣٢}$ = أدنى [($ب_{٣}$ − ٢٥) ، $\frac{ا_{٢}}{ى_{٣٢}}$] = أدنى (٥٠ ، $\frac{١٠٠}{٤}$) = ٤٥

وذلك يستنفد $ا_{٢}$ وبذلك تتحرك إلى الخلية $م_{٣}$ $غ_{٣}$

$س_{٣٣}$ = أدنى [٢٥ ، $\frac{٤٠٠}{٢}$] = ٢٥ . باستيفاء المطلوب عند $غ_{٣}$ تتحرك

إلى $م_{٣}$ $غ_{٤}$.

$س_{٣٤}$ = أدنى [$ب_{٤}$ ، $\frac{ا_{٤} - ٢٥ \times ٢}{ى_{٣٤}}$] أدنى [١٢٥ ، $\frac{٤٥٠}{٢}$] = ١٢٥

ويتبقى ١٠٠ وحدة عند ($م_{٣}$ ، $غ_{٥}$) .

والحل الإبتدائى يشغل خلايا عددها م + ن = ٣ + ٤ = ٧

وبالنسبة للخلايا المشغولة يلزمنا حل المعادلات التالية للحصول على قيم

ط ، ق ،

$٢ط_{١} + ق_{١} = ١$ ، $ط_{١} + ق_{٢} = ١$

$٢ط_{١} + ق_{٣} = ٢$ ، $٤ط_{٢} + ق_{٣} = ١$

$٢ط_{٣} + ق_{٣} = ٢$ ، $٢ط_{٣} + ق_{٤} = ١$

حيث $ط_{١}$ = صفر ، $ط_{٣}$ = صفر يظهور قيمة فى هذا الصف عند

$غ_{٥}$

وبالتعويض نحصل على :

$$ت_١ = ١ ، ق_٢ = ١ ، ق_٣ = ٢ ، ق_٤ = ١$$

$$ط_١ = ٠ ، ط_٢ = -\frac{١}{٤} ، ط_٣ = ٠$$

ومنها يمكننا حساب قيمة $ع_{ون} - ح_{ون}$ لجميع الخلايا الغير مشغولة .
ويلاحظ أن جميع القيم سالبة وإذن فالحل الإبتدائى السابق حل أمثل .

إذا كانت احد القيم فى احد الخلايا $ع_{ون} - ح_{ون}$ موجبة ولنفرض أنها الخلية (ك ل) فإننا يجب أدخال المتغير $س_{كل}$ من الحل . ولتحديد المتغير الذى يترك الحل يجب فى الواقع حساب قيم $ص_{ون}$.

$$\left.\begin{aligned} د_{ون} &= [د_م] ص_{ون} \\ د_{ون} &= ى_{ون} ى_و + ى_{م+ن} \end{aligned}\right\} \qquad (٤٨)$$

حيث $[د_م]$ تحتوى المعاملات للمتغيرات فى أساسية الحل ، $ى_{م+ن}$ متجة الوحدة الذى يحتوى على واحد عند الخلية م + ن فقط ، ثم نحدد المتغير الذى يخرج من الحل من العلاقة :

$$\text{من أدنى} \left[\frac{س_{كل}}{ص_{كل}} \right] \qquad (٤٩)$$

ويلاحظ هنا أننا نستخدم طريقة السمبلكس لعدم إمكانية نقل المتغيرات بسهولة كما فى حالة مسألة النقل العادية .

ولتوضيح المفاهيم السابقة إفترض أن التكلفة $ح_{١٤} = ٥$ وبدلا من ٢ وبذلك تكون $ع_{١٤} - ح_{١٤} = (+٥,)$ بدلا من (-١) ، أى من المتوقع حدوث تحسين بإستخدام المتغير $س_{١٤}$.

الصفوف:

$$٢ص_{٤١}^{١١} + ص_{٤١}^{٢١} + ٢ص_{٤١}^{٣١} = ٣$$

$$٤ص_{٤١}^{٢٢} = صفر$$

$$٢ص_{٤١}^{٢٣} + ٢ص_{٤١}^{٣٣} + ص_{٤١}^{٣٥} = صفر$$

الأعمدة:

$$٢ص_{٤١}^{١١} = صفر$$

$$ص_{٤١}^{٢١} = صفر$$

$$٢ص_{٤١}^{٣١} + ٤ص_{٤١}^{٢٢} + ٢ص_{٤١}^{٣٣} = ١$$

$$ص_{٤١}^{١٤} = صفر \quad ، \quad ص_{٤١}^{٣٥} = صفر$$

ومنها نحصل على :

$$ص_{٤١}^{١١} ، ص_{٤١}^{٢١} ، ص_{٤١}^{٢٢} ، ص_{٤١}^{٣٥} ، ص_{٤١}^{١٤} = صفر$$

$$ص_{٤١}^{٣١} = ١$$

$$ص_{٤١}^{٣٣} = -\frac{١}{٢}$$

ومنها نجد أن المتغير الذى يترك الحل نظراً لوجود قيمة موجبة وللحدة $ص_{٤١}^{٣١} = ١$ هو :

$$\frac{س_{٣١}^{٥}}{ص_{٤١}^{٣١}} = \left[\frac{٢٥}{١}\right] = ٢٥$$

ومنها يكون جدول الحل الجديد التالى جدول (٥٠) ، وفيه جميع قيم ع و ر ـ حو ر > صفر فهو الحل الأمثل .

	٥ر	٥ر	٧٥	١	١		
	غ٥	غ٤	غ٣	غ٢	غ١		
٢٥٠	٠ / -٥٠ر / ١	٥ر / (٢٠٥) / ٢	٢ / -٥٠ر / ٢	١ / (١٠) / ٢	١ / (٥٠) / ٢	م١	-
١٠٠	٠ / -٥٠ر / [illegible]	[illegible]	[illegible]	٢ / ٥ر١ / ٢	٢ / -٥٠ر١ / ١	م٢	-٥ر
٤٠	[illegible]	[illegible]	٢ / [illegible]	٥ر١ / ٠ / ٤	٥ر١ / ٠ / ٢	م٣	٥ر٠
		١٠٠	[illegible]	١٠٠	٥٠		

جدول الحل [illegible]

جدول (٥٠)

(٤ — ١١) نقل الطاقة(*)

أستخدمت مسألة النقل حديثا فى أحد التطبيقات الغير تقليدية والهامة والتى تفتح مجالا هاما أمام مسأله النقل هو نقل الطاقة . استمر أمكن استخدام طريقة النقل فى الترويج لحل مسألة نقل وتوزيع الطاقة فى قطاع القوى الكهربائية وعلى وجه التحديد تكلفة نقل التيار الكهربائى فى شبكة توزيع كهربائى ضخمه .

(*) راجع

Aarvik , And Randòlph P. " Application of Linear Pvogramming in determination 6t Transmission Fees in Power Net-work,, Interfece Vol · 6 № 1 Nev. 1975 pp47-49 Electric .

شملت الدراسة شبكة كهربائية تحتوى على ٨٥ منبع للقوى الكهربائية (محطة توليد للطاقة الكهربائية) و ٩٢ غاية (منطقة استهلاك). واستلزمت الدراسة إعداد تقسيم جغرافى لمناطق وتحديد الملاقات التى تربط المنابع بالغايات — وبذلك يمكن التعبير رياضيا عن المسألة على النحو التالى :

بفرض أن $س_{و ر}$ تحدد كميات الطاقة للقوى الكهربائية بالميجاوات والمطلوب تحديدها — وهى الكمية التى يتم نقلها من منبع الطاقة محطة التوليد و إلى الغاية (منطقة الاستهلاك) ر — فالمطلوب هو إيجاد $س_{و ر}$ ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م
ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

حيث م عدد منابع الطاقة ن عدد مناطق استهلاك الطاقة

تتحدد الاحتياجات الكلية عنـــد المنبع (ب) بالطاقة الكلية المتاحة بالميجاوات وات (أو) والتى يجب نقلها إلى مناطق إستهلاك التى عددها ن — وبذلك فإن :

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{و ر} = أ_{و}$$

كذلك فإن مجموع الطاقه المنقولة من محطات التوليد أو المنابع الناتجة يجب أن تغطى احتياجات المنطقة من الطاقة الكهربائية المطلوبة وبفرض أن $ب_{ر}$ هى الطاقة بالميجاوات المطلوبة عند منطقة الاستهلاك (ر) فإن .

$$\sum_{و=1}^{م} س_{و ر} = ب_{ر}$$

بفرض أن تكلفة نقل الطاقة من محطة التوليد و إلى منطقة الاستهلاك ر لوحدة الطاقة (الميجاوات) هى $ح_{و ر}$

فإن المطلوب هو تدنيه :

مجـو مجـر حور سَور = ع

ويلاحظ أن الصياغة السابقة تجعل المسأله نقل تقليدية — إلا أننا يجب أن تذكر اعتباراً خاصا يجب أخذه فى الحسبان عن دراسة نقل الطاقة ذلك أن الطاقة المتاحة عند المنابع تزيد عن تلك المطلوبة عند مناطق الاستهلاك وذلك لتعويض الفقد فى الطاقة فى خطوط وكابلات نقل التيار فضلا عن احتياطى الطاقة .

ولذلك فإن القيمة المتاحة عند المنابع تضرب فى معامل هو النسبة من مجموع الطاقات المطلوبه لدى المستهلكين إلى مجموع الطاقات المتاحة عند المنابع وبهذه المعالجة يكون .

مجـ او = مجـ بَر

ويضمن ذلك الحصول على مسألة نقل نمطيه .

إستخدام الطريقة السابقة فى الدراسة التى اجريت فى النرويج طبقا للتقارير أدى إلى الحصول على نتائج عملية هامة والوصول إلى الحل الأمثل لنقل وتوزيع الطاقة .

٥ ـ نظرية المباريات وعلاقتها بالبرمجه الخطيه

(٥ ـ ١) تقديم

نظريه المباريات هي دراسة الاستراتيجيات والعوائد في مواقف النزاع(*) وجوهر هذا النزاع يكمن في أن فردين أو أكثر (يسمى كل منهم باللاعب) أمامهم فرص لاختيار بدائل متاحه أمامهم ـ ولكن كل بديل مقترح للاختيار أمام اي منهم يؤثر على قيمة ما يحققه الآخر من عائد بحيث أننا نواجه موقف تعارض في الأهداف.

والمقصود بالاستراتيجية مجموعة القواعد أو الدوال التي بواسطتها يمكن تحديد إختيار لاعب معين في كل تحرك له خلال المباراه.

وأهم ما يميز المسألة أن كل لاعب يجب أن يضع في اعتباره أن ما تحققه

(*) أوجد نظرية المباريات فون فيومان ومورجنسترن عام ١٩٤٤ وذلك في مجال النظرية الاقتصادية

(1) y. Von Neuman and O. Morgenstern « Theory of Gmes And Econmnic Behavior » Prnceton Uncv. Fress , 1944

ولقد طور النظرية فأدخل عليها العديد من المعالجات الرياضية ماكنزى عام ١٩٥٢

(2) y. Cc. Mc Kinsey « Introduction Lo the Theory of Games»

وقدمه ص كثير من الباحثين جهودهم في امتداد النظرية وتعداد تطبيقاتها على سبيل المثال شارنز وكوبر

(3) A. Charnes , W. Cooper « Management Models & Industrial Application of L. P: » John wiley , 1961, Volume II pp 713 — 808 »

المباراه (أو النزاع) من عائد يتوقف على قرارات كل اللاعبين (الخصوم) المشتركين فى المباراة ، ومن ثم فإن كل لاعب يمارس قدراً محدوداً من التحكم فى الموقف وعليه أن يستخدم هذا القدر بأفضل طريقة ممكنه ، وعندما يتخذ قراراً معينا يقيد من حريه اللاعبين الآخرين فى الاختيار ومن ناحيه أخرى هو محكوم فى اتخاذ قراره بما هو متوقع من تصرف الآخرين .

ويمكننا أن نقسم المباريات إلى ثلاثة أنواع رئيسيه

١ — مباريات من فردين

٢ — مباريات ضد الطبيعة

٣ — مباريات متعدده الأفراد .

علينا أن نضع فى اعتبارنا القواعد التالية التى تحكم المباراة :

١ — هناك فردين أو أكثر يشتركون فى المباراة ولكن عدد الأفراد المشتركون فى أى حالة هو عدد محدود .

٢ — لكل لاعب عدد محدود من البدائل المتاحة والتى يختار من بينها

٣ — قرار كل لاعب يؤثر فيما يحققه هو من عائد وفيما يحققه الآخرين المشتركين معه فى المباراة

٤ — قرارات جميع اللاعبين تتخذ آنيا (فى ذات الوقت)

٥ — العائد من جميع التباديل الممكنة لاستراتيجيات اللاعبين معلوم

٦ — الاختيارات المتاحة لأى لاعب متاحة أيضاً لغيره من اللاعبين

٧ — اللاعبين لا يتصلون بعضهم بالبعض .

٨ — يفترض فى لاعبى المباراة الرشد والمنطق وأن لهم نفس الدوافع — والمقصود بالرشد هنا أنه بتعيين هدف محدد وفى وجود نفس الخيارات فإن كل لاعب يختار نفس الاستراتيجية .

(٥ — ٢) مباريات الشخصين ذات الحاصل الصفرى

Two Tersons Sero-Sum Game

فى هذه المباراة يوجد لدينا شخصية (ممكن أن يكونوا شخصين اعتباريين) ويتحدد عائد المباراة فى هذه الحالة بمصفوفة تسمى مصفوفة الدفع Pay-oh Matrix وهى التى تحدد ما يدفعه أحد اللاعبين للاعب الآخر .

اعتبر على سبيل المثال مصفوفه الدفع التالية :

اللاعب (ب)

اللاعب ا		$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$
	$ا_1$	١	—١	١٠
	$ا_2$	—٥	٠	—٤
	$ا_3$	٢	١	٥

فى المباراة السابقة هنالك ثلاثة إختيارات مفتوحة أمام اللاعب ا هى ($ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$) وثلاثه اختيارات مفتوحة أمام اللاعب ب وهى ($ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$) ومداخل المصفوفة تبين مقدار العائد للاعب ا (ومن ثم سميت مصفوفة الدفع أو العائد) ومصفوفة العائد فى هذا المثال (٣ × ٣) لذلك فإن المباراة (٣ × ٣) .

إن مصفوفه العائد السابقة توضح لنا مثلا أن إختيار ا للإستراتيجية $ا_3$ واختيار (ب) للاستراتيجيه $ب_3$ يحقق للاعب (ا) عائداً مقداره (٥) وحدات

وفى مباريات الشخصين ذات الحاصل الصفرى فإنه لأى اختيار بين اللاعبين ما يكسبه اللاعب ا هو ما يخسره اللاعب ب بحيث أن الحاصل لكلى لدخل اللاعبين معا هو الصفر . وعليه فإن مصفوفة اللاعب (ب) هى نفسها مصفوفة العائد للاعب (ا) ولكن بإشارة معكوسة .

وبينما يكون هدف اللاعب ا تعظيم مكسبة (لاعب تكبير) فإن اللاعب ب يهدف إلى تدنية خسارته (لاعب تصغير) . إن اللاعب ا يقدر تماما أنه إذا إختار الاستراتيجية $ا_١$ فإنه قد يكسب (١٠) أو (١) . لكنه أيضاً قد يخسر (١) إذا إختار خصمه الاستراتيجيا $ب_٢$. أما إذا إختار اللاعب (ا) الاستراتيجة ($ا_٢$) فإن أفضل ما يتوقعه عائداً مقداره صفر لكن أيضاً قد يخسر (٥) .

فإذا إنتقلنا إلى إستراتيجة اللاعب ا الثالثة ($ا_٣$) فإن أفضل ما يتوقعه هو عائد مقداره (٥) وأقل ما يتوقعه عائداً مقداره (١) . فإذا رجعنا إلى وجهة نظر اللاعب (ب) لوجدنا الآتى :

أن أفضل عائد للاعب ب هو (٥) عند ($ا_٢$ ، $ب_١$) لكنه يعلم أنه إذا إختار الاستراتيجية ($ب_١$) فإن اللاعب ا لا يختار $ا_٢$ بل بالأحرى يختار $ا_٣$ فيخسر ($ب^٣$) كذلك فإن الخانة ($ا_٢$ ، $ب_٢$) تحقق للاعب ب عائداً مقداره ٤ لكن لا يتوقع إذا إختار $ب_٢$ إلا أن يختار ا الاستراتيجية $ا_١$ فيخسر هو (١٠) .

إن ما قام له اللاعب ا فى الواقع هو أنه نظر إلى كل استراتيجية مفتوحة أمامه وإختار أصغ عائد ممكن لهذه الاستراتيجية نتيجة لاختيار ب استراتيجياته

المختلفة . ثم من كل هذه العوائد الصغرى إختار الاستراتيجية المناظرة لأكبر هذه القيم الصغرى . وما فعله اللاعب ب هو أنه نظر إلى كل استراتيجية متاحة له وإختار أكبر خسارة ممكنة لهذه الاستراتيجية نتيجة إختيار ا استراتيجياته المختلفة . ثم من هذه القيم الكبرى للخسارة إختار الاستراتيجية المناظرة لأصغر هذه القيم الكبرى والتحليل السابق يمثل فى المصفوفة التالية :

اللاعب (ب)

	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	أدنى	
$ا_١$	١	١ —	١٠	١ —	
$ا_٢$	٥ —	صفر	٤ —	صفر	
$ا_٣$	٢	١	٢	$١^{°}$	(أقصى أدنى)
(أقصى)	٢	$١^{°}$	١٠		
		(أدنى أقصى)			

وبذلك يكون حل المباراة هو ($ا_٣$ ، $ب_٢$) وعائد المباراة $ع^{°} = ١$

(ا) نقطة السرج : Saddle Point

من الملاحظات الهامة على المباراة فى المسألة السابقة أن أكبر القيم الصغرى للاعب ا التكبير (ا) مساوية لأصغر القيم الكبرى للاعب التصغير (ب) فى مصفوفة العائد . أى أن :

أقصى (أدنى) = أدنى (أقصى) (١)

إذا كانت المباراة لها هذه الخاصية المعبر عنها فى (١) سميت مباراة ذات نقطة سرج وسميت الاستراتيجية المناظرة ($ا_٣$ ، $ب_٢$) بنقطة السرج . وهى النقطة التى يستريح لها كلا اللاعبين ذلك أن أى إنحراف عنها من المتوقع أن يقال من

عائد لاعب التكبير ويزيد من خسارة لاعب التصغير ومن هنا جاءت التسمية بنقطة السرج .

ومن المهم أن نذكر الخواص التالية :

$خ_1$ — إذا كانت المباراة أكثر من نقطة سرج فإن تقيمه المدفوعات (عائد أو خسارة) عند جميع نقط السرج متساوية .

$خ_2$ — إذا كانت هناك نقطتين للسرج فإن عامود كل منهما مع صف الأخرى يحدد نقط سرج أخرى . وعلى سبيل المثال إذا كان لمصفوفة العقم (٦ × ٤) نقطتين للسرج أحدها عند ($أ_2$ ، $ب_4$) والثانية عند ($أ_5$ ، $ب_1$) فهناك نقطة سرج أخرى عند ($أ_2$ ، $ب_1$) ، ($أ_5$ ، $ب_4$) م

(ب) السيطرة :

إذا رجعنا إلى مصفوفة العائد فى المباراة السابقة :

اللاعب (ب)

	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$
$أ_1$	١١	-١	١٠
$أ_2$	-٥	٠	-٤
$أ_3$	٢	١١	٥

لاحظنا أن اللاعب أ يمكنه أن يسقط من إعتبارة الاستراتيجية $أ_2$ دون أن

يؤثر ذلك على نتيجة المباراة وذلك لأن كل القيم العائد للاستراتيجية ا٢ أقل من القيم المناظرة لها للاستراتيجية ا٣ [(— ٥ < ٢) ، (٠ < ١) ، (— ٤ < ٥)] . أى أن لأى استراتيجية لاعب التكبير ، إذا كانت قيم عناصر الدفع على الصف المناظر لهذه الاستراتيجية أقـــل أو تساوى القيم المناظرة لاستراتيجية أخرى . فإنه يمكنه أن يلغى أو يسقط الاستراتيجية الأولى من الاعتبار .

وبالمثل فإن لاعب التصغير إذا وجـــد قيم الخسارة على العامود المناظر لإحدى استراتيجياته أكبر من أو تساوى القيم المناظرة لإحدى استراتيجياته أكبر من أو تساوى القيم المناظرة لاستراتيجية أخرى فإنه يستطيع أن يلغى أو يسقط الاستراتيجية الأولى من الاعتبار .

وبتطبيق المفهوم السابق نجـــد أنه نتيجة لسيطرة الاستراتيجية ا٣ على الاستراتيجية ا٢ يمكن اختزال مصفوفة الدفع السابقة إلى :

	ب١	ب٢	ب٣
ا١	١	١—	١٠
ا٣	٢	١	٥

ثم نتيجة لسيطرة ب٢ على ب٣ يمكن الغاء ب٣ وتصبح المصفوفة .

	ب١	ب٢
ا١	١	١—
ا٣	٢	١

والتى بالتالى نجد فيها الاستراتيجية ب٣ تسيطر على الاستراتيجية ب١ وتختزل المصفوفة إلى :

	ب٣
أ١	١—
أ٢	١

ويلاحظ أن اكتشافنا للسيطرة يمكننا من اختزال مصفوفة الدفع إلى أبعاد أقل وبذلك يسهل الجهد الحسابى .

حـ — تعميم نتائج مباريات الشخصية ذات الحاصل الصفرى :

(١) فى الحالة العامة تتخذ مصفوفة الدفع لمباراة الشخصية الشكل الآتى .

استراتيجيات اللاعب (ب)

		١	٢	٣		ر		ن
استراتيجيات اللاعب أ	١	د١١	د٢١	د٣١	..	د١ر	..	د١ن
	٢	د١٢	د٢٢	د٣٢	..	د٢ر	..	د٢ن
	:	.	.	.	.	.	.	.
	و	د١و	د٢و	د٣و	..	دور	..	دون
	:	.	.	.	.	.	.	.
	م	د١م	د٢م	د٣م	..	دمر	..	دمن

تمثل مدخل المصفوفة د = [د و ر] مقدار مايدفعه اللاعب ب للاعب أ إذا اختار اللاعب أ الاستراتيجية و واللاعب ب الاستراتيجية ر — فإذا

كانت المباراة ذات حاصل صفرى فإن مصفوفة اللاعب ب هى نفسها مصفوفة اللاعب ا ولكن بإشارة مغايرة .

(٢) اللاعب ا الذى يصطلح على تسميته بلاعب التكبير يختار أصغر قيمة للعائد المتوقع لكل استراتيجية ممكنة له (و) تحت جميع الاختيارات الممكنة (نر) لاستراتيجيات اللاعب ب الذى يصطلح على تسميته بلاعب التصغير والذى يهدف إلى تقليل عائد اللاعب ا .

ثم يحدد الاستراتيجية (و) التى تجعل العائد أكبر ما يمكن التعبير عن ذلك رياضيا بأن الاستراتيجية ا تتحدد من :

أقصى و [أدنى نر (ا و نر)] (٢)

أما اللاعب ب فإن اختياره للاستراتيجية يتحدد من :

أدنى نر [أقصى و (ا و نر)] (٣)

فإذا كان

أقصى و [أدنى نر (ا و نر)] = أدنى نر [أقصى و (ا و نر)] (٤)

سميت المباراة بأنها ذات نقطة سرج .

(٣) إن كل لاعب من اللاعبين يستطيع أن يسقط بعض الاستراتيجيات من حسبانه إذا توفرت شروط معينة — فاللاعب ا إذا كانت لديه استراتيجية معنيه ل بحيث أن قيم العناصر ى و نر أكبر من أو تساوى القيم ى و نر المناظرة لاستراتيجية أخرى ك وذلك لجميع قيم نر فإنه يستطيع أن يسقط الاستراتيجية ك من حسبانه وفى هذه الحالة نقول أن الاستراتيجية ل سيطرت على الاستراتيجية ك — أى أن إذا كان

اك ر ≤ ال ر (٥)

ر = ١، ٢، ... ، ن

فإن ل تسيطر على ك وتسقط ك من الحسبان.

ولنفس الطريقة إذا توفر اللاعب ب استراتيجية ط بحيث أنه لاستراتيجية أخرى ق كانت

او ق ≤ او ط (٦)

و = ١، ٢، ٢، ... ، م

فإن ط تسيطر على ق.

(ء) الاستراتيجيات الحره والاستراتيجيات المختلطة في المباراة التي درسناها من البنود السابقة كانت الاستراتيجية (ا٢ ، ب٢) استراتيجيه مرضيه ومقبولة من كلا اللاعبين وحددت قيمه المباراة ع = ١ — لهذا فإن كل لاعب لا يغير هذه الاستراتيجية وتسمى الاستراتيجية التي يختارها كل لاعب استراتيجية حره Pure Strategy وذلك لأنه يختارها اختياراً مطلقا طوال المباراة — وقد نشأ هذا الوضع نتيجة لشكل مداخل (عناصر) مصفوفة الدفع التي حققت الشرط :

أقصى و [أدنى ر (او ر)] = أدنى ر [أقصى و (او ر)]

فإذا لم يتحقق هذا الشرط تنشأ وضع مغاير — ولتوضيح ذلك سوف ندرس المثال التالي لمصفوفة دفع على الصورة الآتية:-

اللاعب ب

اللاعب ا	ب١	ب٢	ب٣	أقصى (أدنى)
ا١	١	٢	٥	١°
ا٢	٥	٠	٢—	٢—
	٥	٢°	٥	
		أدنى (أقصى)		

حيث نلاحظ أن $\text{أقصى}_{و}$ (أدنى) = ١

$\text{أدنى}_{ر}$ $(\text{أقصى})_{و}$ = ٢

ومعنى ذلك أن $\text{أقصى}_{و}$ $(\text{أدنى}_{ر})$ ≠ $\text{أدنى}_{ر}$ $(\text{أقصى}_{و})$ (٧)

ونتيجة لهذا الوضع فإن اللاعب ا يكسب أقل مما يخسره ب بحيث يتطلع إلى مكسب أكبر واللاعب ب يخسر أكثر مما يكسب ا لذلك يتطلع إلى خساره أقل (لأن كلا اللاعبين يعلم أن المباراة ذات حاصل صفرى) ومعنى ذلك أن حل المباراة هو نقطة ما أو قيمة ما بين ما يكسبه ا باستراتيجية حره ويخسره ب باستراتيجية حرة — وهذا الوضع لا يمكن الحصول عليه إلا بتغيير الاستراتيجيات حيث ينشأ ما يسمى بالاستراتيجيات المختلفة ،

إذا كانت س_{1} هى نسبة الوقت الذى يختار فيه اللاعب ا الاستراتيجية ا_{1} ، س_{2} هى نسبة الوقت الذى يختار فيه الاستراتيجية س_{2} حيث

$$\text{س}_{1} + \text{س}_{2} = 1 \quad (٨)$$

فإذا إختار اللاعب ب الاستراتيجية ب$_1$ فالعائد المتوقع للاعب أ هو :

س$_1$ (١) + س$_2$ (٥) (٩)

وإذا إختار اللاعب ب الاستراتيجية ب$_2$ فالعائد المتوقع للاعب هو :

س$_1$ (٢) + س$_2$ (٠) (١٠)

وإذا إختار اللاعب ب الاستراتيجية ب$_3$ فالعائد المتوقع اللاعب أ هو :

س$_1$ (٥) + س$_2$ (−٢) (١١)

إن اللاعب ب يحاول بإستمرار أن يختار استراتيجية بحيث لا يزيد عن قيمة معينة ع . بينما يحاول أ أن يختار س$_1$ ، س$_2$ بحيث لا يقل عائدة عن ع . ومن هنا يمكن القول أن مسألة اللاعب أ هي :

(١٢)
س$_1$ + ٥س$_2$ ≥ ع
٢ س$_1$ ≥ ع
٥ س$_1$ − ٢س$_2$ ≥ غ
س$_1$ + س$_2$ = ١

وبالنسبة لاعب ب فإنه إذا رمزنا إلى إختيارة الاستراتيجات ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ بالقيم ص$_1$ ، ص$_2$ ، ص$_3$ حيث :

ص$_1$ + ص$_2$ + ص$_3$ = ١

فإن مسألة اللاعب ب هي :

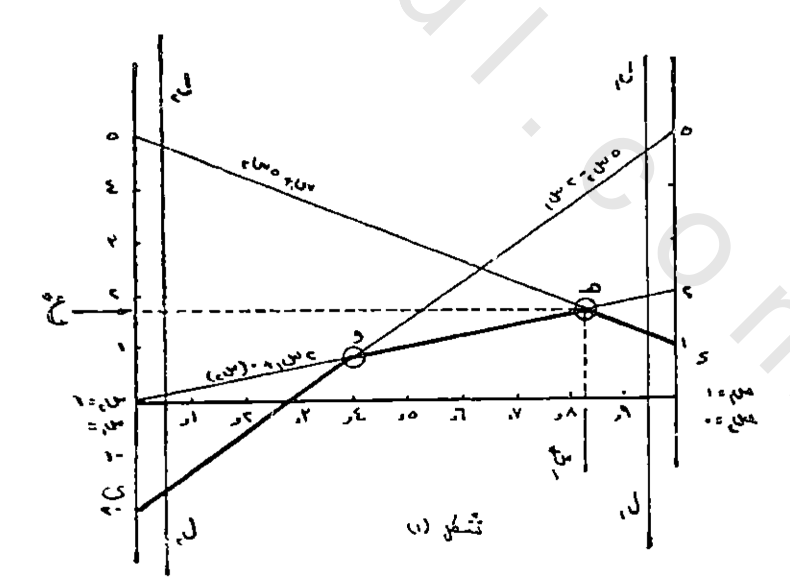
$$\left\{\begin{array}{l} \text{ص}_1(1)+\text{ص}_2(2)+\text{ص}_3 \geqslant \text{ع} \\ \text{ص}_1(5)+\text{ص}_2(0)+\text{ص}_3(-2) \geqslant \text{ع} \\ \text{ص}_1+\text{ص}_2+\text{ص}_3 = 1 \end{array}\right. \quad (12)$$

هـ ــ الحـــل البيانى لمسألة المباريات الفردية ذات حاصل صفرى والاستراتيجيات المختلطة :

إذا أمكن إختزال مصفوفة الدفع بإستخدام مبدأ السيطرة ليصبح على الصورة

$$(2 \times \text{ن}) \quad \text{أو} \quad (\text{م} \times 2)$$

أمكن تحديد الاستراتيجيات المختلطة بيانيا على سبيل المثال لحل المسألة الموضحة فى القيود [١٣] : نرسم محور أفقى تحدد عليه قيم س_1 ، س_2 ، حيث $\text{س}_2 = 1 - \text{س}_1$ ومحورين رأسيين عليهم قيمة عائد المباراة ع .



شكل (١)

فى شكل [١] توضح الخطوط المرسومة العائد المتوقع نتيجة لاختيار اللاعب م أى قيم $س_١$ ، $س_٢$ وذلك لجميع المتباينات [١٣] تمثل بالنسبة للقيد $س_١ + س_٢$. عندما $س_١ = ١$ ، $س_٢ =$ صفر يكون العائد [١] بينما إذا كانت $س_٢ = ١$ ، $س_١ =$ صفر كان العائد [٥] ؛ والخط الواصل بين النقطتين هو العائد لأى قيم $س_١$ ، $س_٢$ محصورة بين الصفر والواحد وهكذا بالنسبة لباقى القيود . ونظرا لأن اللاعب ب فى المباراة يحاول دائما تدنية العائد ام فإن اللاعب م إذا إختار أى أستراتيجية مثلا [$ل_١$] كما هو مبين بالرسم فإنه يتوقع الحصول على قيمة أكبر من أدنى فقط لتقاطع $ل_١$ مع خطوط عائد الاستراتيجيات وكذلك بالنسبة للخط $ل_٢$. وبالتالى يمثل الخط المنكسر وهو ى الحل الهندسى للعائد المتوقع للاعب م للاستراتيجيات المختلفة $س_١$ ، $س_٢$ ولذلك فإن اللاعب م يختار أعلى نقطة فى المضلع ى هـ و ى وهى النقطة هـ فيكون هى العائد المتوقع للاستراتيجات المناظرة .

وفى حالتنا ع = م ، $س_١ = \frac{٥}{٦}$ ، $س_٢ = \frac{١}{٦}$.

ويمكن تحليل المباراة على النحو التالى :

إن العائد المتوقع للاعب م من المباراة بفرض إختياره الاستراتيجية و بإحتمال $س_و$ عند إختيار اللاعب ب الاستراتيجية ر بالاحتمال $ص_ر$ هو :

$$س_و \, ى_{ور} \, ص_ر$$

وبذلك يكون العائد من المباراة ع = $\sum_و \sum_ر س_و \, ى_{ور} \, ص_ر$

$$\left.\begin{array}{l} ع = س_{١}ص_{١} + س_{٢}\,٢ص_{٢} + س_{١}\,٥ص_{٣} + س_{٢} \\ \quad ٥ص_{١} + س_{٢}(٠)ص_{٢} - س_{٢}\,٢ص_{٣} \\ \quad س_{١} + س_{٢} = ١ \\ \quad ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣} = ١ \end{array}\right\} \quad (١٤)$$

وبالتعويض عن $س_{٢}$ بدلالة $س_{١}$ ، $ص_{٢}$ بدلالة $ص_{١}$ ، $ص_{٣}$ نحصل على :

$$ع = ص_{١}[٥ - ٦س_{١}] + ص_{٣}[٥س_{١} - ٢] + ٢س_{١} \quad (١٥)$$

اللاعب ا إذا إختار $س_{١} < \frac{٢}{٥}$ فإن القوس $[٥س_{١} - ٢]$ يكون سالبا وبالتالى تقل ع .

كذلك إذا إختار $س_{١} > \frac{٥}{٦}$ فإن القوس $[٥ - ٦س_{١}]$ يكون سالبا وبالتالى تقل ع .

[وذلك بغض النظر عن قيم ص] . ولمنع ذلك فإن :

$$\frac{٢}{٥} < س_{١} < \frac{٥}{٦}$$

وفى نفس الوقت فإن اللاعب ب يمكنه إختيار $ص_{١}$ ، $ص_{٣}$ مساوية للصفر وبذلك يعتمد ا فى عائده على قيمة $س_{١}$ التى يجب أن يجعلها أكبر ما يمكن لذلك فن المنطقى أن يختار $س_{١} = \frac{٥}{٦}$ ومنها $س_{٢} = \frac{١}{٦}$.

أما اللاعب ب فإننا يمكننا تحليل استراتيجياته برتيب حدود المعادلة [١٤] على الصورة :

$$غ = س_{١}[-٤ص_{١} + ٢ص_{٢} + ٧ص_{٣}] + ٥ص_{١} - ٢ص_{٣} \quad (١٦)$$

وبإختيارنا السابق $س_{١} = \frac{٥}{٦}$ فإن $ص_{٢} =$ صفر من [١٦] وبالتالى تؤول [١٧] إلى :

$$ع = ٢س_{١} [ص_{٢} - ٢ص_{١}] + ٥ص_{١} \qquad [١٨]$$

ونظرا لأن : $ص_{١} + ص_{٢} + ٠ = ١$ فإن [١٨] تختزل إلى :

$$ع = ٢س_{١} [١ - ٣ص_{١}] + ٥ص_{١}$$

إذا إختار اللاعب ب $ص_{١} > \frac{١}{٣}$ لأصبح القوس سالب وبذلك يقل العائد حيث يمكن للاعب ا إختيار $س_{١}$ أكبر ما يمكن أى $س_{١} = ١$. لذلك فإن $ص_{١} \leqslant \frac{١}{٣}$.

ولكن من مصلحة اللاعب ب أن يجعل $ص_{١}$ أكبر ما يمكن حتى تكون قيمة ع إذا إختار اللاعب ا $س_{١} =$ صفر أكبر ما يمكن

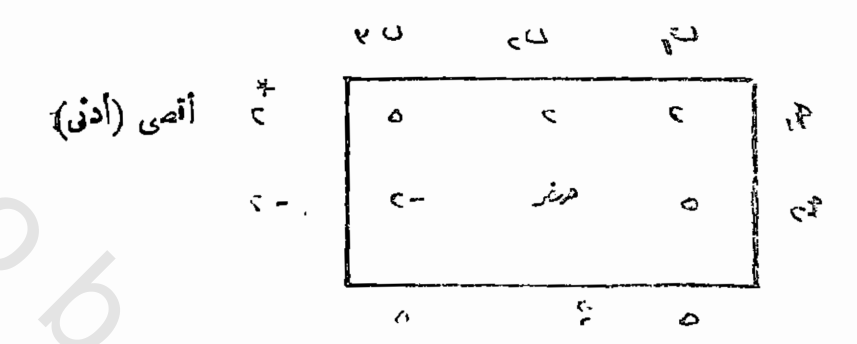
أى أن : $ص_{١} = \frac{١}{٣}$ ، $ص_{٢} = \frac{٢}{٣}$ ، $ع = \frac{٥}{٣}$

والمفهوم السابق ببساط، يعنى أن كل لاعب يحاول أن يجعل المباراة لا تتأثر بإختيار اللاعب الآخر أو بحيد اللاعب الآخر . وبهذا تكون الإستراتيجيات والعوائد .

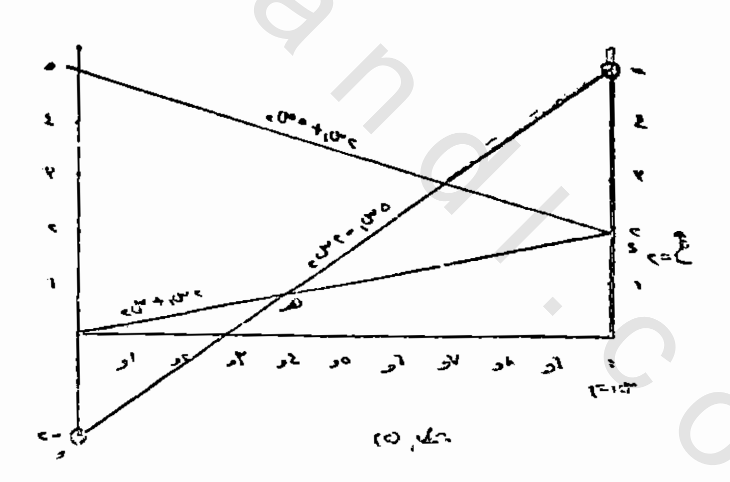
ا $[\frac{٥}{٦} ، \frac{١}{٦}]$ ، ب $[\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ،$ صفر $]$ ، $ع = \frac{٥}{٣}$

و — التحليل البيانى للسيطرة ونقطة السرج :

إذا تغير العنصر $ا_{١} ب_{١}$ فى مصفوفة الدفع الخاصة بالمثال السابق من [١] إلى [٢] وأصبحت المصفوفة كما يلى :



فيلاحظ أن المصفوفة لها نقطة سرج عند [$أ_١$ $ب_٢$] . وإذا مثلت بيانيا حصلنا على شكل (٢) التالى :



والذى يتضح منه أن الحل الأمثل هو استراتيجية بحتة [$س_١$ = ١ ، $س_٢$ = صفر] عند أعلى نقطة للضلع ء هـ و [النقطة ء] وهى فى حالتنا نقطة السرج .

ويلاحظ أن اللاعب ب يمكنه أن يسقط من حسبانه الاستراتيجية $ب_١$

لأنها لا تدخل فى المضلع هـ ء و ولا تؤثر على عائد المباراة . ويتضح ذلك من مداخل المصفوفة لأن

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ صفر \end{bmatrix}_{ب_٢} < \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}_{ب_١}$$

س - الاستراتيجيات البديلة : فى بعض المباريات تتعدد الاستراتيجيات المختلفة التى تحقق نفس العائد الأمثل للمباراة - تسمى هـذه الاستراتيجيات بالاستراتيجيات البديلة .

على سبيل المثال المصفوفة الدفع المباراة التالية :

	ب١	ب٢	ب٣	
أ١	٥	١	١—	١—
أ٢	صفر	١	٤	صفر ← أقصى (أدنى)
	٥	١	٤	

أدنى « أقصى » أدنى أقصى ≠ أقصى أدنى

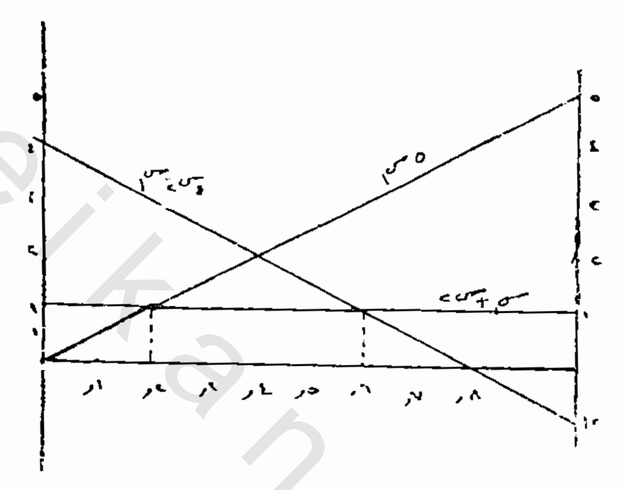
المباراة السابقة ليس لها نقطة سرج باستراتيجيات حره لأن أدنى « أقصى » ≠ أقصى « أدنى » ولذلك نستخدم الاستراتيجيات المختلفة حيث يمكن صياغة المسألة لكل من لاعب التكبير « أ » لاعب التصغير « ب » على النحو التالى :-

اللاعب « أ »	اللاعب « ب »
$٥س_١ \geqslant ع$	$٥ص_١ + ص_٢ - ص_٣ \leqslant ع$
$س_١ + س_٢ \geqslant ع$	صفر $ص_١ + ص_٢ + ٤ص_٣ \leqslant ع$
$- س_١ + ٤س_٢ \geqslant ع$	$ص_١ + ص_٢ + ص_٣ = ١$
$س_١ + س_٢ = ١$	

« ٥٢٨ »

وتمثل المباراة فى الشكل «٣» والذى بين أن استراتيجية أ محصور بين ٦و ≤ $س_{١}$ ≤ ٢و وأى استراتيجية فى هذا المدى تعطيه نفس العائد الأمثل ع* = ١ وذلك يسمى بالاستراتيجية البديلة حيث

$$س_{١} = ٦و٨ + ٢و(١ - ٨)$$



شكل «٣»

ح — صياغة المباراة بالوجهة الخطية : — إعتبر مصفوفة الدفع التالية :

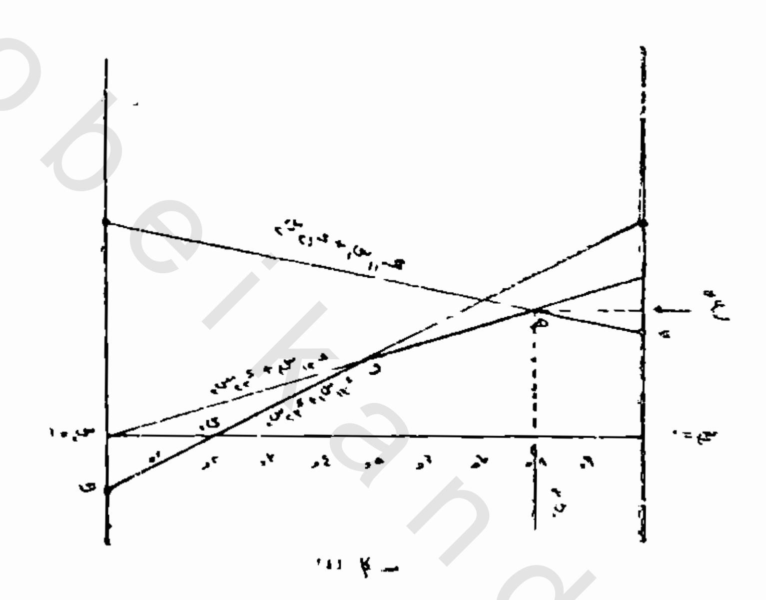
اللاعب «ب»

	$ب_{١}$	$ب_{٢}$	$ب_{٣}$
اللاعب «أ» $أ_{١}$	$د_{١١}$	$د_{٢١}$	$د_{٣١}$
$أ_{٢}$	$د_{١٢}$	$د_{٢٢}$	$د_{٣٢}$

هذه المسألة يمكن صياغتها للاعب أ كما يلى :

$$\left.\begin{array}{l} س_{١}د_{١١} + س_{٢}د_{١٢} \geqslant ع \\ س_{١}د_{٢١} + س_{٢}د_{٢٢} \geqslant ع \\ س_{١}د_{٣١} + د_{٣٢} \geqslant ع \\ س_{١} + س_{٢} = ١ \end{array}\right) \quad ...... (١٩)$$

والتى يمكن تمثيلها بالرسم كما أوضحنا فيما سبق فى شكل «٤» التالى حيث لقيم حقيقية للمعاملات يعطى الحل الأمثل عند أعلى نقطة هـ للمضلع ى هـ وى



شكل «٤»

ويمكننا فى مجموعة القيود «١٩» إجراء التعويض $س_٢ = ١ - س_١$

$$ى_{١١} (س_١) + ى_{١٢} (١ - س_١) \geqslant ع$$

$$ى_{٢١} (س_١) + ى_{٢٢} (١ - س_١) \geqslant ع \qquad (٢٠)$$

$$ى_{٣١} (س_١) + ى_{٣٢} (١ - س_١) \geqslant ع$$

التى تختزل إلى : —

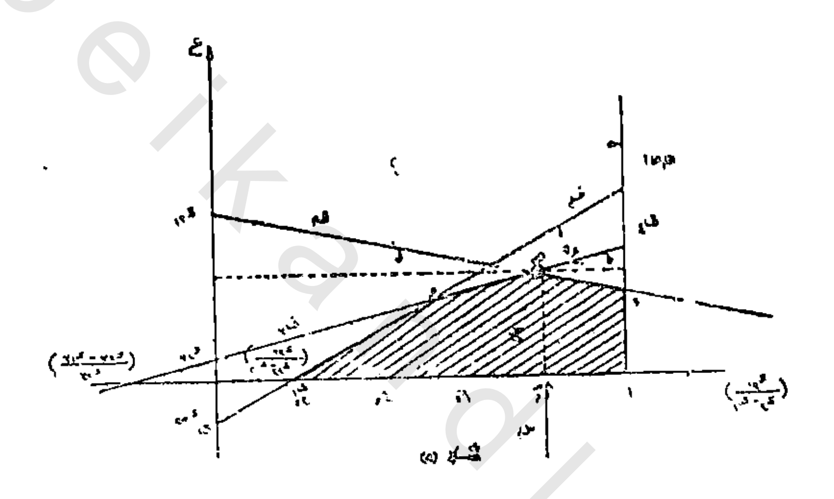
تعظيم ع

مستوفيا :

$$\left.\begin{array}{l} ق_{1} = س_{1}(ى_{12} - ى_{11}) + ع \leq ى_{12} \\ ق_{2} = س_{1}(ى_{22} - ى_{21}) + ع \leq ى_{22} \\ ق_{3} = س_{1}(ى_{32} - ى_{31}) + ع \leq ى_{32} \end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\text{صفر} \leq س_{1} \leq 1$$

$$ع \geq 0$$



شكل (٥)

وبهذه الطريقة يمكن حل مسألة برمجة خطية فى متغيرين س١ ، ع بطريقة البيانية كما هو واضح فى شكل (٥) لاحظ أن منطقة الامكانيات ع=(ى هـ و ى١) فى شكل (٥) هى نفسها ا قطة ى هـ و ى١ فى شكل (٤)

(ط) تعميم الاستراتيجيات المختلفة وصياغ المباريات بالبرمجة الخطية

فى هذه المرحلة يمكننا أن نستخلص بعض النتائج الهامة لمباريات الشخصية ذات الحاصل الصفرى بإستراتيجية مخلطة .

إذا كانت مصفوفة الدفع د = [ى$_{ر ن}$] لايتوفر لها نقطة سرج أى أن :

$$\text{أدنى}_{ن} (\text{أقصى}_{و}) [ك_{و ن}] \neq \text{أقصى}_{و} (\text{أدنى})_{ن} [ك_{و ن}] \qquad (٢٢)$$

فإن كل من اللاعبين أ ، ب عليه اختيار استراتيجية مختلطة بمعنى أن :

اللاعب أ (لاعب التكبير) يختار احتمالات $س_{و}$ ، و = ١ ، ٢ ، ... م

$١ \geq س_{و} \geq$ صفر ،

$$\sum_{و=١}^{م} س_{و} = ١$$

اللاعب ب (لاعب التصغير) يختار احتمالات $ص_{ن}$ ، ن = ١ ، ٢ ، ... ، ن

$١ \geq ص_{ن} \geq$ صفر

$$\sum_{ن=١}^{ن} ص_{ن} = ١$$

وذلك لتحسين وضع كل لاعب . فاللاعب الأول بإعتباره لاعب تكبير يفترض قيمة معينة ع للعائد ويحاول تعظيمها قدر الامكان — أما اللاعب الثانى بوصفه لاعب تصغير فهو يفترض قيمة معينة لعائد المباراة ع وهو يحاول تدنيتها قدر الامكان .

وتأسيسا على ذلك يمكن صياغة المباراة كمسألة برمجة خطية على شكل دالة هدف وقيود :

<u>مسألة لاعب التكبير</u> (اللاعب الأول)

اجعل قيمة ع أكبر ما يمكن مستوفياً الشروط التالية

$$\sum_{و=1}^{م} س_و \, أ_{و ر} \geq ع$$

$$ر = ١ ، ٢ ، \dots ، ن$$

$$\sum_{و=1}^{م} س_و = ١$$

$$١ \geq س_و \geq صفر$$

(٢٣)

مسألة لاعب التصغير

أجعل قيمة ع أقل ما يمكن مستوفيا الشروط التالية

$$\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر \, أ_{و ر} \leq ع$$

$$و = ١ ، ٢ ، \dots ، ن$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر = ١$$

$$١ \geq ص_ر \geq صفر$$

(٢٤)

واقد أوضحنا الحل البيانى فى حالة وجود متغيرين (استراتيجين لأحد اللاعبين)

أما فى حالة وجود متغيرات أكثر من ذلك فنستخدم طريقة السمبلكس .

(٥ - ٣) العلاقة بين البرمجة الخطية ونظرية المباريات

يهمنا فى هذا البند أن نوضح كيف يمكن تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى مسألة مباريات :-

أن مسألة البرمجة الخطية التقليدية هى

المسألة المباشرة :

أجعل

$ع = \sum حـ_ر ف_ر$ أكبر ما يمكن مستوفيا

$\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ور} ق_ر \leq ب_و$ (٢٥)

$و = ١ ، ٢ ، ... ، م$

$ف_ر \geq$ صفر

المسألة الثنائية أجعل

$ع = \sum ب_و ق_و$

أقل ما يمكن مستوفيا

$\sum_{و=1}^{م} أ_{ور} ق_و \geq حـ_ر$ (٢)

$ق_و \geq$ صفر

وبالإضافة إلى ذلك سوف نفترض أن $حـ_ر$ ، $ب_و$ موجبة

باجراء التعويضات التالية :

$ف'_ر = حـ_ر ف_ر$ ، $ق'_و = ب_و ق_و$ تؤول المسائل السابقة إلى

<u>المسألة المباشرة : —</u>

تعظيم ع $=$ مجـ$_{ر=1}^{ن}$ ف َ ر مستوفيا

مجـ $\frac{\text{ا و ر}}{\text{حـ ر}}$ ف َ ر $<$ ب و (٢٧)

ف َ ر $\leqslant$ صفر

<u>المسألة الثنائية</u>

تدنيه

ع $=$ مجـ$_{و=1}^{م}$ ق َ و مستوفيا

مجـ$_{و=1}^{م}$ $\frac{\text{ا و ر}}{\text{ب و}}$ ق َ و $\leqslant$ حـ ر (٢٨)

ق َ و $\leqslant$ صفر

وبقسمة كل قيد على متطلباته أى على ب و فى (٢٧) ، وعلى حـ ر فى (٢٨) نحصل على :

<u>المسألة المباشرة :</u>

تعظيم

ع $=$ مجـ ف َ ر مستوفيا

مجـ$_{ر=1}^{ن}$ $\frac{\text{ا و ر}}{\text{حـ ر ب و}}$ ف َ ر $\leqslant$ ١ (٢٩)

ف َ ر $\leqslant$ صفر

المسألة الثنائية :

تدنيه

$$ع = حـ\, ق'_و \qquad \text{مستوفيا}$$

$$\sum_{و=1}^{م} \frac{أ_{و ن}}{حـ_{ن}\, ب_و}\, ق'_و \geq 1 \qquad (٣٠)$$

$$ق'_و \geq صفر$$

استخدم التعويض التالى :

$$\frac{أ_{و ن}}{حـ_{ن}\, ب_و} = ى_{و ن}$$ تؤول المسائل السابقة إلى :

المسألة المباشرة :

تعظيم

$$ع = حـ\, ف'_{ن} \qquad \text{مستوفيا}$$

$$\sum_{ن=1}^{ن} ى_{و ن}\, ف'_{ن} \geq 1 \qquad (٣١)$$

$$ف'_{ن} \geq صفر$$

المسألة الثنائية :

تدنيه

$$ع = حـ\, ق'_و \qquad \text{مستوفيا}$$

$$\sum_{و=1}^{م} ى_{و ن}\, ق'_و \geq 1 \qquad (٣٢)$$

$$ق'_و \geq صفر$$

المسألتين (٣١) ، (٢١) مناظرتين للمسائل التالية :

المسألة المباشرة :

تدنية :

$$ع = مجـ \frac{١}{ف_ر}$$

مستوفيا

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} \; ى_ر \; \frac{ف_ر}{\text{مجـ} ف_ر} > \frac{١}{\text{مجـ} ف_ر} \qquad (٣٣)$$

$$ف_ر \geqslant صفر$$

المسألة الثنائية :

تعظيم :

$$ع = مجـ \frac{١}{ف_و}$$

مستوفيا

$$\text{مجـ}_{و=١}^{م} \; ى_ر \; \frac{ق_و}{\text{مجـ} ف_و} \leqslant \frac{١}{\text{مجـ} ف_و} \qquad (٣٤)$$

$$ق_و \geqslant صفر$$

بالتعريض عن

$$\frac{1}{\text{مج}\,\bar{\text{ق}}_{\text{و}}} = \frac{1}{\text{مج}\,\bar{\text{ف}}_{\text{ر}}} = \text{ع} \quad ،$$

$$\frac{\bar{\text{ق}}_{\text{ر}}}{\text{مج}\,\bar{\text{ق}}_{\text{و}}} = \text{س}_{\text{و}} \qquad (٣٥)$$

$$\frac{\bar{\text{ف}}_{\text{ر}}}{\text{مج}\,\bar{\text{ف}}_{\text{ر}}} = \text{ص}_{\text{ر}}$$

لحصلنا على

المسألة الثنائية (مسألة لاعب التكبير فى المباراة)

تعظيم

ع

مستوفيا

$$\sum_{\text{و}-1}^{\text{م}} \text{ى}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{و}} \geqslant \text{ع}$$

$$\sum_{\text{و}-1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{و}} = 1 \qquad (٣٦)$$

$$1 \geqslant \text{س}_{\text{و}} \geqslant \text{صفر}$$

المسألة الأولية (مسألة لاعب التصغير فى المباراة)

أدنيه

ع

مستوفيا

$$\sum_{ر=1}^{ن} و_{ر} ص_{ر} < ع$$

(٣٧)

$$\sum_{ر=1}^{ن} ص_{ر} = 1$$

$$1 \geqslant ص_{ر} \geqslant صفر$$

٥ – ٥ الامتدادات الرئيسية فى نظرية المباريات

(٥ – ٥ – ١) المباريات المقيدة Côutrained Games

تنشأ المباريات المقيدة عندما تكون الاستراتيجيات المختلفة لمباريات مصفوفات الدفع تخضع لشروط (متباينات) إضافية وأهمية هذا الإمتداد هو أنه يسمح بصياغة أكثر واقعية لبعض المواقف التى تنشأ فى التطبيقات الاقتصادية أو العسكرية أو فى المباريات ضد الطبيعة .

وفى هذه الحالة يتوفر لدينا صياغة أكثر عمومية للمسألة والتى يمكن وضعها فى صورة مبرمجة خطية على الشكل التالى :

مسألة اللاعب الأول :

تدنيه

$$ع = ع_{1} + \sum_{ل} ب_{ل} ت_{ل}$$

مستوفياً

(٣٨)

$$\sum و_{ر} س_{1} + ع_{1} + \sum ب_{ل ر} ت_{ل} \geqslant صفر$$

$$\sum_{و} س_{و} = 1$$

$$\sum_{و} حـ_{و} س_{و} \geqslant حـ$$

مسألة اللاعب الثانى

تعظيم

$$\text{ع} = -\text{ع}_{٢} + \sum \text{ح}_{\text{ه}}\, \text{ف}_{\text{ه}}$$

مستوفيا

$$\left.\begin{array}{ll} \sum \text{د}_{\text{و ر}}\, \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ع}_{٢} + \sum \text{ح}_{\text{و ه}}\, \text{ف}_{\text{ه}} & \geqslant \text{صفر} \\ \sum_{\text{ر}} \text{ص}_{\text{ر}} & = ١ \\ \sum_{\text{ر}} \text{ب}_{\text{ل ر}}\, \text{ص}_{\text{ر}} & \geqslant \text{ب}_{\text{ل}} \end{array}\right\} \quad (٣٩)$$

$$\text{حيث } \text{س}_{\text{و}} ، \text{ص}_{\text{ر}} \geqslant \text{صفر}$$

$$\text{ت}_{\text{ل}} ، \text{ف}_{\text{ه}} \geqslant \text{صفر}$$

$$\text{ع}_{١} ، \text{ع}_{٢} \text{ غير مقيده الاشارة}$$

وفى الصياغة السابقة [ى و ر] هى مداخل مصفوفة الدفع ، $\text{س}_{\text{و}}$ ، $\text{ص}_{\text{ر}}$ هى الاحتمالات التى يختارها اللاعب الأول والثانى على الترتيب للاستراتيجيات :

والصياغة السابقة تستوعب كافة القيود الممكنة على المباريات .

(٥ — ٥ — ٢) المباريات ضد الطبيعة Cames Against Natнre

بعض المسائل فى إطار نظرية القرارات الإحصائية يمكن النظر إليها على اعتبار الطبيعة هى الخصم الذى يحاول متخذ القرار تحديد أفضل استراتيجياته للتوصل إلى أقصى عائد من « المباراة » . وأهمية هذا الامتداد فى تحقيق أمكانية صياغة بعض المواقف الإدارية والفنية على اعتبارها مباريات ضد خصم اعتبارى هو « الطبيعة » وبذلك تسمى مباريات ضد الطبيعة .

وأهم ما يميز هذا النوع من المسائل هى كيفية تحديد استراتيجيات متخذ القرار

وكيف يفترض تصرف « الطبيعة » كخصم اعتبارى فى المباراة — حيث فى كثير من الأحوال يكتشف متخذ القرار أن استخدام القواعد العادية لمباراة شخصين ذات عائد صفرى لاتحقق أهدافه — وفيما يلى نورد اقتراحات الباحثين فى هذا الشأن .

(١) طريقة أدنى أقصى مخاطره

هذه الطريقة اقترحها سافاج* — وهى تستخدم مبدأ أدنى (أقصى) بعد تعديل مصفوفة الدفع ليتناسب طبيعة المسألة حيث يتم إعطاء الفرص أهمية تتناسب مع الفرق بين العوائد المقيسة كأفضل إمكانيات تحت كل عامود — وعلى سبيل المثال إفترض أن عناصر المصفوفة د = [دو ر] — يمكن أن تعرف المخاطرة بالتعبير التالى :

أقصى و دو ر = صو ر + دو ر (٤٠)

لكل ر ، و — أى أن (صو ر) هى القيمة التى يجب إضافتها لأى دو ر لتصبح مساويه لأعلى قيمة فى عناصر مصفوفة الدفع الواقعة أسفل للعامود (ر) . فإذا كانت

د*ر = أقصى و دو ر (٤١)

للعامود (ر) فإن

صو ر = دو ر د*ر

(*) راجع

(1) Savage « Fôundation of Statistics » Johen Wley N.y. 1954

(2) Coombs & Davis " Decision Process John Wiley N.y. 1954

وقد أقترح سافاج تطبيق مبدأ أدنى (أقصى) للحصول على حل يحقق ترنية أقصى مخاطرة أي :

أدنيه

ر

مستوفيا

مجـ س و م ور ≤ ر

ر = ١ ، ... ، ن

مجـ س و = ١

(٤٢)

ويمكن تحويل البرنامج (٤٢) إلى مباراة بدلالة العناصر الأصلية لمصفوفة الدفع كما يلي :

أدنيه ر

مستوفيا

مجـ س و ى ور + ر ≥ ى° ر

ر = ١ ، ... ، ن

مجـ س و = ١

س و ≥ صفر ، ر غير مقيد بالإشارة

(٤٣)

والمسألة الثنائية للمسألة المباشرة (٤١) هي

تعظيم

مجـ ى° ر ص ر − ط

مستوفيا

مجـ ى ور ص ر − ط ≤ صفر

مجـ ص ر = ١ ، ص ر ≥ صفر

(٤٤)

(ب) طريقة لابلاس — برنرلى (السبب الغير كافى)

فى هذه الطريقة نظرا لإفتراض الجهل التام عن تصرف الطبيعة يتم تحديد إحتمالات متساوية لجميع الاستراتيجيات الحرة الممكنة ، وبعد ذلك يتم إختيار الصف الذى له أعلى قيمة متوقعة ،

بوضع $ص_ر = \frac{1}{ن}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن فإن مباراة الطبيعة تكون

تعظيم :

$- ط$

مستوفيا

$$\begin{cases} مج\ ى_{ر}\ ص_{ر} - ط \geqslant صفر \\ ص_{ر} = \frac{1}{ن} \\ مج\ ص_{ر} = ١ \end{cases} \qquad (٤٥)$$

بينما تكون مباراة اللاعب الأول هى :

تدنيه :

$$\begin{cases} م + \frac{1}{ن}\ مج_{ر}\ ع_{ر} \\ \text{مستوفيا} \\ مج\ س_{و}\ ى_{ر} + م + ع_{ر} \geqslant صفر \\ مج\ س_{و} \quad = ١ \\ س_{و} \geqslant صفر ، ع_{ر}\ \text{غير مقيدة الإشارة} \end{cases} \qquad (٤٦)$$

ويلاحظ أن المتغير الوحيد فى مباراة الطبيعية هو ط لذلك فإن :

$$\text{ط}^* = \text{أكبر}_{\text{و}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{و ر}}\, \text{ص}^*_{\text{ر}} = \text{أكبر}_{\text{و}} \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{و ر}}}{\text{ن}} \qquad (٤٧)$$

ومن نظرية الثنائية فإن :

$$\text{ط}^* = \text{ر}^* + \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}} \text{ع}^*_{\text{ر}} \qquad (٤٨)$$

(ح) طريقة هيركو فيتش اوشر التفاؤل — التشاؤم(*)

فى هذه الطريقة تحاول إعتبار النظرة التفاؤلية والتشاؤمية للفرد عن الطبيعة وتحديد قواعد رشيدة للعب تتفق مع هذه الطريقة ويمكن التعبير عن هذه الطريقة كما يلى :

أفترض أن :

$$\left.\begin{aligned} \text{د}_{\text{و}} &= \text{أدنى}_{\text{ر}}\ \text{د}_{\text{و ر}} \\ \text{د}'_{\text{و}} &= \text{أقصى}_{\text{ر}}\ \text{د}_{\text{و ر}} \end{aligned}\right\} \qquad (٤٩)$$

أى أن :

$\text{د}_{\text{و}}$ = أقل قيمة فى الصف و لعناصر مصفوفة الدفع

$\text{د}'_{\text{و}}$ = أكبر قيمة فى الصف و لعناصر مصفوفة الدفع

---

* راجع :

Raiffa & Luce « Games and Decisions » John willy & Sôns 1957.

وبالتجربة يتم تحديد معامل (مؤشر) للتفاؤل — التشاؤم

١ ⩾ ف ⩾ صفر لتحديد :

$$ف د_و + (١ - ف) د_و \qquad (٥٠)$$

وبهذا المؤشر أو المعامل يمكن أن يفضل مثلا ف د هـ + (١ − ف) د هـ على ف د ك + (١ − ف) د ل وفى حالة ف = ١ (التشاؤم التام) تكون القاعدة هى أدنى (أقصى) أما فى حالة التفاؤل ف = صفر . فإن القاعدة أقصى (أقصى) .

ولإستيضاح ذلك فى المباريات المقيدة ضد الطبيعة فإن مباراة الطبيعة تكون:

تدنيه :

ط

مستوفيا

$$\left. \begin{array}{l} مح د_{و ر} ص_ر - ط \geqslant صفر \\ - مح د_{و ر} ص_ر \geqslant - ف د_و - (١ - ف) د_و \\ مح ص_ر = ١ \end{array} \right\} \qquad (٥١)$$

حيث ف مؤشر يتم تعيينه مسبقا

وتكون المباراة المناظرة للفرد اللاعب ضد الطبيعة هى :

تعظيم :

م – مجـ ع و [ف ى و + (١ – ف) د و]

مستوفيا

مجـ (و = ١ إلى م) س و ى و ر – م – مجـ ع ر ى و ر ⩾ صفر   (٥٢)

مجـ س و = ١

س ⩾ صفر

وبالتالى يلاحظ من القيود (٥١) أن طريقة ميركوفيتش تقيد استراتيجيات الطبيعة :

مجـ ى و ر ص ر ⩾ ف ى و + (١ – ف) د و

لجميع قيم (و) ، فإذا كانت ف = ١ فإن   (٥٣)

ط° = أكبر و ى و

ومن ناحية أخرى فإذا كانت ف = صفر فإن

ط° = أكبر و د و   (٥٤)

(٥ — ٥ — ٣) المباريات المستمرة

فى المباريات المستمرة أو اللانهائية ذات الحاصل الصفرى فإن كل من اللاعبين ا ، ب يختار إستراتيجيته بواسطه دوال توزيع احتمالية ا (س) ، ب (ص) على التوالى وذلك فى الفترة المحدودة (١٠٠) - ويتحدد العائد الذى يحصل عليه ا من ب لأى إختيار س من ا وأى إختيار ص من ب بواسطة دوال العائد المستمرة د (س ، ص) ، ويتوقع اللاعب ا عائد نتيجة لاستراتيجية معينه اللاعب (ب)

$$\text{من} \qquad \int_{\cdot}^{1} د(س ، ص)\, د ا(س)$$

ولكن اللاعب ب يختار استراتيجيته ب (ص) ليجعل العائد اللاعب ا أقل ما يمكن أى أن القيمة المتوقعة لاعب ا التى يرمز لها بالعائد ع (س ، ص) يعطى بالمعادلة

$$ع(س ، ص) = \int_{\cdot}^{1}\int_{\cdot}^{1} د(س ، ص)\, د ا(س)\, د ب(ص) \qquad (٥٥)$$

ويمكن تطبيق مبدأ نظرية السرج على المباريات المستمرة - حيث إذا كانت الدالة د مستمره لكل من المتغيرين س ، ص فإن المباراة لها حل يعطى ذ

$$\left.\begin{array}{l} \text{أكبر}_ا\ \text{أدنى}_ب\ ع(ا ، ب) = \text{أدنى}_ب\ \text{أكبر}_ا\ ع(ا ، ب) \\ \text{والحل الأمثل } ا^{\circ} ، ب^{\circ} \text{ للمباراة يحقق} \\ \text{أكبر}_ا\ ع(ا ، ب^{\circ}) = \text{أدنى}_ب\ ع(ا^{\circ} ، ب) \end{array}\right| \qquad (٥٦)$$

وقد يتعذر فى كثير من الأحيان حل المباريات الاثنائية أو المستمرة ولذلك توضع بعض الشروط على دالة العائد د (س ، ص) لإمكان الحصول على حل . من هذه الشروط على سبيل المثال * :

(أ) إفتراض أن دالة العائد د (س ، ص) دالة منفصلة ـ والدوال المنفصلة هى التى تظهر على صورة مجموع دوال كل منها يظهر منه متغير واحد فقط فى حالتنا س ، ص وبالتالى يمكن التعبير عن د (س ، ص) بالدوال

د (س ، ص) = مجـ$_{ر}$ و$_{ر}$ د$_{1ر}$ (س) د$_{2ر}$ (ص) (٥٧)

(ب) إفتراض أن دالة العائد د (س ، ص) دالة محدبه لاستراتيجيات ب لأى استراتيجيه اللاعب أ بمعنى أن :

د (س ، [ت ص$_{1}$ + (١ - ت) ص$_{2}$]) > ت د (س ، ص$_{1}$) + (١ — ت) د (س ، ص$_{2}$)
١ > ت > صفر (٥٨)

(٥ — ٥ — ٤) المباريات المتتابعة وشجرات المباراة

Sequential games and game Tree

فى المباريات السابقة كان اللاعبين يتخذا قراراتهم أنيا (فى نفس الوقت) ولا يوجد إتصال بينهما وكلاهما يجهل ما إتخذه الطرف الآخر من قرارات . ولكن هناك بعض الأوضاع التى تنشأ عنها مباريات يأخذ فيها اللاعب قراره بعد أن يتحرك اللاعب الآخر (يتخذ قرارة) ومثال ذلك المباشر هو الشطرنج حيث يأخذ كل لاعب قرارة بعد أن يتحرك اللاعب الآخر — أى أن القرارات

(*) راجع خواص الدوال المنفصلة والمحدبة فى الباب الأول .

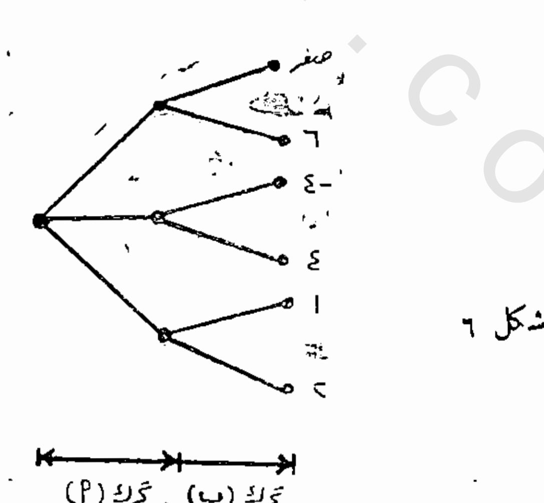
تتخذ تباعاً وكل قرار يتخذ يكون متأثراً بالحركات السابقة ومؤثرا على التحركات (القرارات) اللاحقة.

والمباريات المتتالية يمكن أن تمثل بواسطة مصفوفات دفع ولتوضيح ذلك ندرس المثال التالي :

افترض أن اللاعب ا يبدأ المباراة ولديه فرصة إختيار ثلاثة بدائل مفتوحة أمامه، وأن اللاعب ب يتخذ قرارة بعد ذلك بإختيار أحد بديلين مفتوحين أمامه. فإن العائد يتوقف على أى حركة بدأها اللاعب ا وأى حركة رد بها اللاعب ب على ا والتى يمكن وضعها على صورة المصفوفة التالية :

		اللاعب (ب)	
		الحركة (١)	الحركة (٢)
اللاعب (ا)	الحركة ( )	صفر	٦
	الحركة (٢)	—٤	٤
	الحركة (٣)	١	٢

ويمكن أيضاً تمثيل المباراة فى شكل يوضح تحرك اللاعبين ويسمى بشجرة المباراة الموضحة فى الشكل التالى :



شكل ٦

المباراة السابقة مباراة سهلة للغاية وواضح أن أفضل استراتيجية اللاعب ا هو إختيار الحركة الثالثة وتسمى المباراة المتتالية السابقة. أما مباراة تتابعية ٣ × ٢ نسبة إلى حركات (ا) وحركات (ب) ـ ويمكننا أن تمدد استراتيجيات ب على النحو التالي :

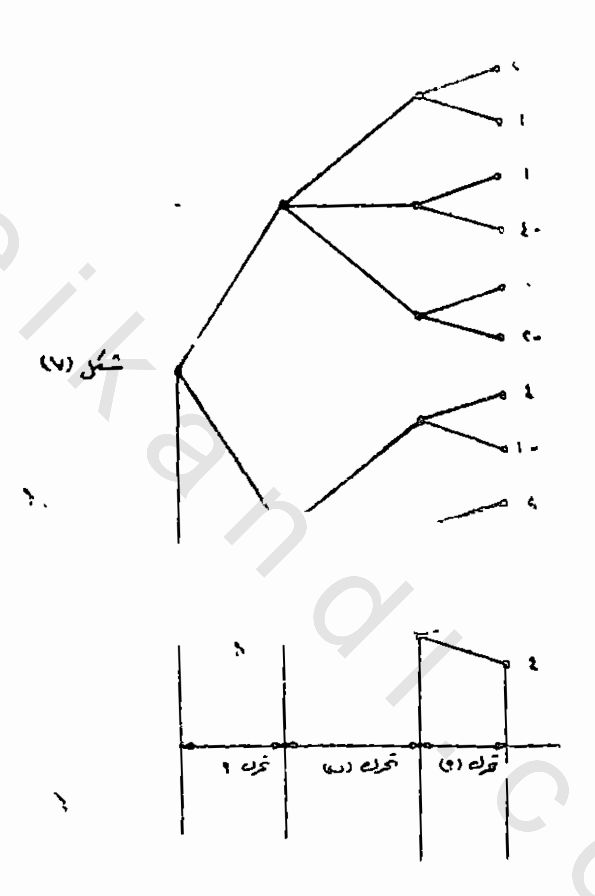
العائد	الاستراتيجيه	وصف التحرك اللاعب (ب)
٠، ٤–، ١	$ب_1$	حركة(١) بغض النظر عن تحرك ا
٠، ٤، ٢	$ب_2$	حركة(١) إذا كان إختيار ا هو $ا_1$ فإذا لم يكن فالحركة(٢)
٦، ٤–، ٢	$ب_3$	حركة(١) إذا كان إختيار ا و $ا_2$ فإذ لم يكن فالحركة(٢)
٦، ٤، ١	$ب_4$	حركة(١) إذا كان إختيار ا هو $ا_3$ فإذا لم يكن فالحركة(٢)
٦، ٤، ٢	$ب_5$	حركة(٢) بغض النظر عن تحرك ا
٦، ٤–، ١	$ب_6$	حركة( ) إذا كان إختيار ا $ا_1$ فإذا لم يكن فالحركة(١)
٠، ٤، ١	$ب_7$	حركة(٢) إذا كان إختيار ا هو $ا_2$ فإذا لم يكن فالحركة(١)
٠، ٤–، ٢	$ب_8$	حركة(٢) إذا كان اختيار ا و $ا_3$ فإذا لم يكن فالحركة(١)

وبهذه الطريقة يمكن توضيح مصفوفة الدفع لكافة اختيارات (ب) الثمانية فى الجدول السابق لإختيارات ا الثلاثة فى مصفوفة الدفع التالية

اللاعب (ب)

اللاعب (ا)	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$	$ب_5$	$ب_6$	$ب_7$	$ب_8$	
$ا_1$	٠	٠	٦	٦	٦	٦	٠	٠	٠
$ا_2$	٤–	٤	٤–	٤	٤	٤–	٤	٤	٤–
$ا_3$	١	٢	٢	١	٢	١	١	٢	١ ه أقصى أدنى
أدنى أقصى	١°	٤	٦	٦	٦	٦	٤	٢	

المباراة السابقة لها نقطة سرج عند ($ا_٢$ $ب_١$) والعائد ع = ١ - وبنفس الاسلوب يمكن الحصول على مصفوفة الدفع والعائد لمباريات متتالية لها شجرة قرارات فى شكل (٧) .


شكل (٧)

(٥ — ٦) معيار المعلومة الاستراتيجية فى المباريات :

أن وجود معلومات لدى إحدى اللاعبين (الخصوم) عن اللاعب الآخر فى المباراة (عن إتجاهاته أو توقعات حركاته) يؤدى إلى حدوث إختلاف بين فى نتيجة عائد المباريات لكلا اللاعبين حيث أى معلومات إضافية يحصل عليها أى خصم سوف، على أسوأ تقدير، لن تؤدى إلى تقليل العائد المتوقع له وتأسيسا على ذلك يمكن أعتبار الفرق بين عائد اللاعب فى غيبة المعلومة وعائد اللاعب فى وجود المعلومة معيار الاستراتيجية المعلومة.

أفترض أن :

$$[\text{د} = \text{ع}_{\text{وز}}] \quad ، \quad \text{و} = ١ ، \cdots ، \text{م}$$

$$\text{ز} = ١ ، \cdots ، \text{ن}$$

مصفوفة دفع لمباراه . وأن $\text{ع}_{\text{ي}}$ هى مصفوفة جزئية ترتيبها ك × مكونة من عدد من الصفوف من المصفوفة الأصلية التى صفوفها فـم .

كذلك فإن $\text{ع}_{\text{ل}}$ هى مصفوفة جزئية ترتيبها ل مكونة من عدد من الأعمدة من المصفوفة الأصلية التى أعمدتها فـ $_{\text{ن}}$.

وبذلك فإن $\text{ع}_{\text{ي}}$ مكونة من صفوف يرمز لها بالرمز فـ$_{\text{مك}}$. بينما $\text{ع}_{\text{ل}}$ مكونة من أعمدة يرمز لها بالرمز فـ$_{\text{ن}}$ (شكل ٨) .

أن أهم ما يميز وجود معلومات عن المباراة اللاعبين هو وجود إحتمالات $\text{ح} = (\text{ح}_{١} ، \text{ح}_{٢} ، \cdots ، \text{ح}_{\text{ر}})$ تحدد إختيار اللاعب م اتراك الصفوف (المصفوفات الجزئية المحتوية على الصفوف) والتى عددها ر أى :

$$ف_{م_1} \ ، \ ف_{م_2} \ ، \ \cdots \ ، \ ف_{م_ر}$$

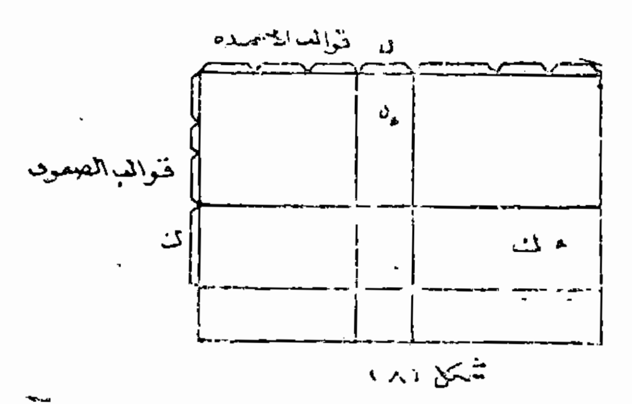
كذلك وجود إحتمالات تحدد إختيار اللاعب ب لقوالب الأعمدة (المصفوفات الجزئية المحتوية على الأعمدة) والتى عددها هـ .

$ت = (ت_1 \ ، \ ت_2 \ ، \ \cdots \ ، \ ت_هـ)$ ، والتى يرمز لها بالرمز :

$$(ف_{ن_1} \ ، \ ف_{ن_2} \ ، \ \cdots \ ، \ ف_{ن_هـ})$$

وبهذا المفهوم يمكن تحويل المباراة فى وجود معلومات جزئية إلى مباراة تقليدية مقيدة حيث بفرض أن : $س_1 \ ، \ \cdots \ ، \ س_م$ هى استراتيجيات للاعب الأول تطبيقا للمناقشة السابقة تكون :

$$(٥٩) \quad \begin{cases} س_1 + س_2 + \cdots + س_{م_1} = ح_1 \\ س_{ر(ك-1)+1} + \cdots + س_{م_ك} = ح_ك \\ س_{ر(ر-1)+1} + \cdots + س_{م_ر} = ح_ر \\ 1 \geqslant ح_ل \geqslant صفر \\ \sum_{ل=1}^{ر} ح_ل = 1 \end{cases}$$



شكل (٨)

(٥ – ٧) التطبيقات العيارية لنظرية المباريات

(٥ – ٧ – ١) الإعلان والتسويق : من التطبيقات الهامة لنظرية المباريات تلك المتعلقة بالدعاية والتسويق – فإذا فرضنا أن هناك شركتين تقومان التسويق منتجاتهم وأن المبيعات الكلية لمنتجات الشركتين والتى تمثل الطلب على السلعة ثابته (السوق متشبع) بحيث أن أى زيادة فى البيع فى أى شركة يتبعها نقص مماثل البيع فى شركة أخرى (الحاصل الصفرى للمباراة) فإذا أمكن جدولة الزيادة والنقص فى المبيعات على شكل عناصر المصفوفة د = [ءو ر] والتى تمثل مداخل مصفوفة الدفع – فإنه يمكننا فى هذه الحالة اعتبار الوضع مماثل لمباراة بين شخصين (الشركتين) بمصفوفة دفع ذات حاصل صفرى واستخدام نظرية المباراة فى تحديد استراتيجية الشركتين المتنافستين .

وعلى سبيل المثال إفترض شركتين متنافستين فى انتاج مساحيق الغسيل وأن بدائل الإعلان المتاحة هى الصحف والإذاعة والتليفزيون وأنه أمكن الحصول على مصفوفة الدفع كزيادة أو نقص فى مبيعات أى شركة مقدره بالنسبة المئوية لحجم المبيعات الكلية فى السوق على النحو التالى :

		الشركة الثانية		
		(ب١) تليفزيون	(ب٢) راديو	(ب٣) صحف
الشركة الأولى	تليفزيون (أ١)	٢	٣	٦
	راديو (أ٢)	٨	١	—١
	صحف (أ٣)	—٤	صفر	٢

مصفوفة الدفع (د)

إفترض أن اللاعب الأول استطاع أن يعرف عن اللاعب الثانى إختياره ف ن ل . و التالى فإن اللاعب الأول لديه آدر أكبر من المعلومة الاستراتيجية بحيث أنه يستطيع أن يحصل على قيمة لا تقل عن :

أدنى ل ع (ى ل)　　(٦٠)

حيث :

ع (ى ل) تدل على عائد المباراة بمصفوفة الدفع ى ل . وبفرض رشد اللاعبين فإن اللاعب ا سوف يحصل على القيمة فى (٦٠) ويعبر الفرق ق(ب) .

ق(ب) = أدنى ل ع (ى ل) — ع (ى)　　(٦١)

عن قيمة أو معيار المعلومة الإستراتيجية عن (ب) التى استطاع ا أن يعرفها عن ب .

حيث ع (ى) العائد بدون الحصول على أى معلومات عن المباراة للاعب ا

وبنفس الطريقة فإن : ق (ا) = ع(ى) — أقصى ع (ى ك)

حيث : إفترضنا أن اللاعب الثانى ب استطاع أن يعرف عن اللاعب الأول إختياره المسبق ف م ك وبالتالى أمكن الحصول على عائد المباراة أقصى ك ع(ى ك)

وبذلك تكون ف (ا) معيار المعلومة الإستراتيجة التى استطاع ب أن يعرفها عن ا .

ففى المصفوفة السابقة مثلا ($د_{٣٢}$) = — ١ وهى تمثل النقص فى مبيعات للشركة الأولى نتيجة اختيارها استراتيجية الإعلان فى الراديو بينما اختارت الشركة الثانية استراتيجية الاعلان فى الصحف .

نلاحظ أنه بالنسبة للشركة الأولى فإن الاستراتيجية $ا_٣$ المناظرة للإعلان فى الصحف يمكن أن تسقط من الحسبان وذلك لسيطرة الاستراتيجية $ا_١$ وهى المناظرة للإعلان فى التليفزيون عليها [٢ > — ٤ ، ٣ > صفر ، ١ ≥ ٢] — ومن ثم يمكن اختزال المصفوفة السابقة إلى

	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	أقصى أدنى
$ا_١$	٢	٣	٦	٢*
$ا_٢$	٨	١	—١	—١
أدنى أقصى	٨	٣*	٦	

كما أن مصفوفة الدفع السابقة ليس لها نقط سرج لأن أقصى أدنى ≠ أدنى أقصى — ولذلك يجب تحديد الاستراتيجية المختلطة أفترض أن $س_١$ ، $س_٢$ احتمالات اختيار الشركة الأولى للبدائل $ا_١$ ، $ا_٢$ على الترتيب فإن :

مسألة الشركة الأولى تكون

تعظيم ع مستوفيا

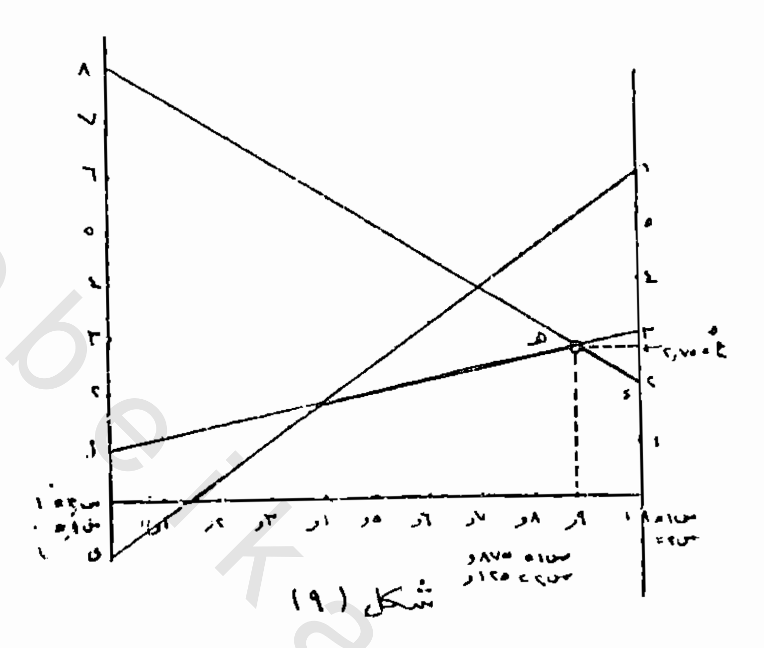
$٢س_١ + ٨س_٢ \geq ع$

$٣س_١ + س_٢ \geq ع$

$٦س_١ - س_٢ \geq ع$

$س_١ + س_٢ = ١$

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر



شكل (١٩)

وبعطى الحل : $س_١ = ٨٧٥ر$ ، $س_٢ = ١٢٥ر$ ، $ع = ٢٫٧٥$

وبالتعويض بالنسبة للشركة الثانية وبفرض استراتيجياتها $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ فإن :

$$٢ ص_١ + ٣ ص_٢ + ٦ ص_٣ \geqslant ٢٫٧٥$$

$$٨ ص_١ + ٢ ص_٢ - ص_٣ \geqslant ٢٫٧٥$$

$$ص_١ + ص_٢ + ص_٣ = ١$$

ومنها : $ص_١ = ٢٥ر$ ، $ص_٢ = ٧٥ر$ ، $ص_٣ = ٠$

أن أهم المشاكل فى استخدام نظرية المباريات فى التطبيق السابق هو كيفية الحصول على مصفوفة الدفع وأحد الإقتراحات الرئيسية فى هذا المجال هو إعتبار أن كل شركة تضع ميزانية او مخصصات للإعلان قيمتها $ق_١$ ، $ق_٢$ على الترتيب

توزعها على وسائل الاعلان المختلفة السابقة وبفرض أن حجم الطلب المتأثر بالاعلان هو (ط) قسم بين الزبائن التى تتأثر بالإعلان بالتليفزيون ط$_{\text{ف}}$ والزبائن التى تتأثر بالاعلان فى الإذاعة ط$_{\text{ا}}$ والزبائن التى تتأثر بالاعلان فى الصحف ط$_{\text{ح}}$

بحيث أن $\text{ط} = \text{ط}_{\text{ف}} + \text{ط}_{\text{ا}} + \text{ط}_{\text{ح}}$ (٦٣)

ويمكننا أن نعبر عن الطلب$_{\text{ط}}$ بتفصيل أوق كما يلى :

$$\text{ط} = \bar{\text{ط}}_{\text{ف}} + \bar{\text{ط}}_{\text{ا}} + \bar{\bar{\text{ط}}}_{\text{ح}} + \bar{\bar{\text{ط}}}_{\text{فا}} + \bar{\text{ط}}_{\text{فح}} + \bar{\bar{\bar{\text{ط}}}}_{\text{فاح}} \quad (٦٤)$$

حيث قيم $\bar{\text{ط}}$ ذات المدلول الوحيد تدل على جمهور الزبائن المتأثر بالاعلان فى وسيلة أعلان وحيده .

قيم$\bar{\bar{\text{ط}}}$ ذات المدلولين تدل على جمهور الزبائن التأثر بالاعلان فى وسيلتين الإعلان .

قيم$\bar{\bar{\bar{\text{ط}}}}$ ذات المدلولات الثلاثة تدل على جمهور الزبائن المتأثر بالاعلان فى التليفزيون والراديو والصحف .

بفرض أن $\text{هـ} = \dfrac{\hat{\text{ق}}_{1}}{\hat{\text{ق}}_{1} + \text{ق}_{2}}$

ل$_{\text{و}}$ ، ك$_{\text{و}}$ معادلات تقسيم الطلب بين اللاعبين (الشركتين) والتى تعتمد على هـ لكل وسائل الاعلان و ، $\bar{\text{ل}}_{\text{و}} = 1 - \text{ل}_{\text{و}}$ ، $\bar{\text{ك}}_{\text{و}} = 1$ ك$_{\text{و}}$

وفى هذه الحالة يمكن الحصول على مداخل مصفوفة الدفع كما يلى : (شكل ١٠)

		اللاعب الثانى		
		ف	ا	ح
اللاعب الأول	ف	ط ف(ه)	ط ن − ل̄ ١ ط̄ ن١ − ك̄ ط̄ ن١ح	ط ن − ل̄ ٢ ط̄ ن ح − ك̄ ٢ ط̄ ن١ح
	ا	ط ١ − ل ١ ط̄ ف١ − ك ١ ط̄ ف ح١	ط ١(ه)	ط ١ − ل̄ ٢ ط̄ ١ح − ك̄ ٢ ط̄ ن١ح
	ح	ط ح − ل ٢ ط̄ ف ح − ك ٢ ط̄ ف ح١	ط ح − ل ٢ ط̄ ح١ − ك ٢ ط̄ ح ف١	ط ح(ه)

(٥ — ٧ — ٢) الطبقات العسكرية :

تمثل المعارك الحربية مجالا خصبا فى تطبيق نظرية المباريات — وكما هو الحال فى كل مسائل المباريات فإن أهم المسائل التى يجب التركيز عليها هو كيفية الحصول على مصفوفة الدفع — ولهذا السبب فإنه فى التجارب الميدانية يتجه الاهتمام الأكبر إلى الحصول على معلومات وافية عن كفاءة الأسلحة ومقدرتها وتأثيرها على غيرها لإمكان تحديد عناصر مصفوفة الدفع المناظرة لمختلف التوفيقات .

وفى الواقع فإن معيار المعلومة الاستراتيجية يلعب دورا هاما فى هذا الصدد تحدده قدرة الكشف عن استراتيجيات مسبقة للخصم (العدو) — كذلك فإن وجود قيود فى المباريات قد تفرضه طبيعة المعارك أو القدرات القتالية الأمر الذى يعطى أهمية كبيرة للمباريات المقيدة — كما أن المباريات المتتالية والتى تتوالى فيها المعارك من الأمور الهامة فى الطبيقات العسكرية وسوف يبين بمثال أفتراضى أحد التطبيقات الممكنة لنظرية المباريات فى الصراعات الحربية :

عند هجوم طائرات العدو على المواقع يمكن للدفاع الجوى استخدام ثلاثة طرق للدفاع و = ١، ٢، ٣ كما يمكن للعدو استخدام ثلاثة طرق للهجوم س = ١، ٢، ٣ . ولأى استراتيجية س للهجوم وأى استراتيجيه ر للدفاع هناك عائد لجانب الدفاع يقدر ر ى و، س يمكن اعتباره فى هذه الحالة الخسارة فى الطائرات المغيرة .

ولنفرض أن استراتيجيات العدو هى

١ — استخدام الطيران المرتفع (م = ١)

٢ — استخدام الطيران المرتفع المزود بأجهزة تشويش (م = ٢)

٣ — إستخدام الطيران المنخفض (م = ٣)

وأن استراتيجية الدفاع هى :

١ — صواريخ موجهة مضادة للطائرات (و = ١)

٢ — طيران مشتبك (و = ٢)

٣ — صواريخ مشاه (و = ٣)

إن الطيران المرتفع يزيد من فاعلية الصواريخ الموجهة ولهذا فإن ك١ احتمال كبير الإصابة للهدف — بينما يقل هذا الاحتمال فى حالة إستخدام أجهزة التشويش ويقل الاحتمال إلى أكثر مدى إذ كان الطيران منخفض بحيث أن

$$ك_{١١} > ك_{٢١} > ك_{٣١}$$

فإذا استخدم الطيران المشتبك فإن الطائرات التى بها أجهزة تشويش يزيد احتمال سقوطها وذلك لإنخفاض قدرتها على المناورة — بينما يقل احتمال سقوط الطائرات للعدو فى حالة استخدام الطيران المنخفض وذلك لأن احتمال اكتشاف الطائرات المغيرة بأجهزة الإنذار يقل . أى أن من المتوقع أن يكون

$$ك_{٢٢} > ك_{٣٢} > ك_{١٢}$$

أما صواريخ المشاة — فإن فاعليتها الكبرى تظهر فى الطيران المنخفض بينما تقل فى كلا الحالتين الآخرتين أى أن :

$$ك_{٣٣} > ك_{٢٣} > ك_{١٣}$$

وبالافتراحات السابقة يمكن تكوين الجدول الإفتراضى التالى :

استراتيجيات العدو (الهجوم)

ب

		ب$_{1}$	ب$_{2}$	ب$_{3}$		
استراتيجيات الدفاع	أ$_{1}$	٧و	٢و	٠٥و	٠٥و	
	أ$_{2}$	٤و	٤٥و	١٥و	١٥و	
	أ$_{3}$	٢و	٢٥و	٨و	٢و *	أقصى أدنى
		٧و	٤٥و *	٨و		
			أدنى أقصى			

ونلاحظ أن أدنى$_{ر}$ أقصى$_{و}$ ≠ أقصى$_{و}$ أدنى$_{ر}$

لذلك لا توجـــد نقطة سرج لاستراتيجيات حرة — ولذلك يجب تحديد الاستراتيجيات المختلطة س$_{و}$ ، و = ١ ، ٢ ، ٣ ص$_{ر}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣ .

ويمكن التعبير عن المعركة الحربية السابقة بإستخدام نظرية المباريات بصياغة البرمجة الخطية كما يلى :

(أ) مسألة الدفاع : (لاعب التكبير)

تعظيم ع   مستوفيا

٧و س$_{1}$ + ٤٠و س$_{2}$ + ٢و س$_{3}$ ≥ ع

٢و س$_{1}$ + ٤٥و س$_{2}$ + ٢٥و س$_{3}$ ≥ ع   (٦٥)

٥و س$_{1}$ + ١٥و س$_{2}$ + ٨و س$_{3}$ ≥ ع

س$_{1}$ + س$_{2}$ + س$_{3}$ = ١   س$_{1}$، س$_{2}$، س$_{3}$ ≥ صفر

(ب) مسألة الهجوم : لاعب التصغير

$$
(٦٦)\quad
\begin{cases}
\text{تدنيه} \quad ع \quad \text{مستوفيا} \\
٧,ص_1 + ٢,ص_2 + ٠,٥,ص_3 \geqslant ع \\
٤,ص_1 + ٤,٥,ص_2 + ١,٥,ص_3 \geqslant ع \\
٨,ص_1 + ٠,٢٥,ص_2 + ٢\,ص_3 \geqslant ع \\
ص_1 + ص_2 + ص_3 = ١
\end{cases}
$$

$$ص_1 ، ص_2 ، ص_3 \geqslant \text{صفر}$$

ولحل مسألة الدفاع (٦٥) بالسمبلكس فإن المطلوب هو :

$$
(٦٧)\quad
\begin{cases}
\text{تعظيم} \quad ع - ك\,س_7 \\
\text{مستوفيا} \\
٧,س_1 + ٤,س_2 + ٢,س_3 - ع - س_4 = ٠ \\
٢,س_1 + ٤,٥,س_2 + ٢٥,س_3 - ع - س_5 = ٠ \\
٠,٥,س_1 + ١,٥,س_2 + ٨,س_3 - ع - س_6 = ٠ \\
س_1 + س_2 + س_3 + س_7 = ١
\end{cases}
$$

وتمثل الجداول (١، ٢، ٣، ٤، ٥) خطوات الحل بالسمبلكس .

حيث فى الجدول (٥) الحل الأمثل يناظر الاستراتيجية

$$س_1 = ١١, \quad س_2 = ٤٩, ، \quad س_3 = ٤٠, ، \quad ع^* = ٣٦٥,$$

ويمكن الحصول على استراتيجية الهجوم من (٦٦) — إلا أنه يمكن الحصول

على استراتيجية اللاعب الثانى مباشرة بإستخدام نظرية "المواطل المكملة وذلك من جدول (٥) للحل الأمثل لمسألة اللاعب الاول وذلك أسفل $س_٤$ ، $س_٥$ $س_٦$ وهى قيم $ع_ر - ح_ر$ وفى حالتنا $ص_١ = ٤,٠$ ، $ص_٢ = ٣٦٠,٠$ ، $ص_٣ = ٢٣٥,٠$

ومعنى الحل السابق هو أن أفضل استراتيجية للدفاع الجوى هو إستخدام دفاع الصواريخ بنسبة ١١٪ والطيران المشتبك بنسبة ٤٩٪ وصواريخ المشاه بنسبة ٤٠٪ وبذلك يتحقق لنا أعلى خساره لطيران العدو تصل إلى ٣٦,٥٪ من حجم الطيران المغير وأما بالنسبة للعدو فمن المتوقع أن تكون استراتيجيته هى استخدام الطيران الغير مشوش بنسبه ٤٠٪ واستخدام الطيران المزود بأجهزة التشويش بنسبة ٣٦,٥٪ وإستخدام الطيران المنخفض بنسبة ٢٣,٥٪ .

جدول (٥)

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	ع	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
٠	٠	٠	١٠	١٠	١ر	[illegible]	٢ر	٠	[illegible]	٠
٠	٠		٠	١٠	[illegible]	[illegible]	١ر	٠	[illegible]	
٠	١٠	٠	٠	١٠	١ر	١٥ر	٠٩ر	٠	[illegible]	٠
[illegible]		٠	-		١	١	١	١	[illegible]	[illegible]
٠	٠	٠	٠	١٠	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		

جدول (٦)

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	ع	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
٠	٠	٠	١٫٤٣٠	١٫٤٢٠	٢٩ر	٧٥ر	١		[illegible]	٠
٥	٠	١٠	٢٩ر	٧١٠ر	١٢٩ر	٢٤ر	٠	٠	[illegible]	٠
٠	١٠	٠	[illegible]	٩٢٠ر	٧٨٨ر	[illegible]	٠	٠	[illegible]	٠
١٠	٠	٠	١٫٤٢	[illegible]	١٣ر	٤٨ر	٠	١	[illegible]	[illegible]
٥	٠	٥	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]		

جدول (٧)

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	ع	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
٠	٢٦ر	٥	١٫٤٠	١٫١٠	٠	٢٥ر	١	٠	[illegible]	٠
٠	٢٤ر	١٠	٨٣ر	١٣٠ر	[illegible]	[illegible]	٠	٠	[illegible]	٠
٠	١٫٢٠	٥	٨ر	١٫١٣٠	[illegible]	١٥ر	٠	٠	[illegible]	٠
١٠	٩ر	٠	١٫٢٠	[illegible]	٠	٢٢ر	٠	١	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	-	[illegible]	[illegible] ١٠	٥	[illegible]		[illegible]		

جدول (٨)

	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
								[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	٠	٠	١	٠	[illegible]	٠
٠	[illegible]	[illegible]	٩ر	[illegible]	٠	١	٠	٠	[illegible]	٠
٠	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١	٠	٠	٠	[illegible]	٠
١٠	[illegible]	١	[illegible]	[illegible]	٠	٠	٠	١	[illegible]	[illegible]
٠	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] ١٠	٠	٠	٠	[illegible]		

حد	متغيرات الحل	الحل	س١	س٢	س٣	ع	س٤	س٥	س٦	سه
		حن	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	− ى
٠		١١،	١	٠	٠	٠				
٠	س٢	٤٩و	٠	١	٠	٠				
٠	س٣	٤٠و	٠	٠	١	٠				
١	غ	٣٦٥و	٠	٠	٠	١	٤و	٣١٥و	٠٢٥و	٣٦٥و
		غن − حن	٠	٠	٠	٠	٤و	٢٦٥و	٠٣٥و	ى + ٣٦٥و

جدول (٥) جدول الحل الأمثل

(٥ — ٧ — ٣) التفتيش العشوائى :

التفتيش العشوائى أحد الأمثلة الهامة للمباريات ضد الطبيعة والتى يلعب فيها الإحصائى دور الخصم للكشف عن العيوب التى يصطلح على تسميتها بالخصم الثانى أو الطبيعة . وسوف نوضح ذلك بمثال .

فى أحد المصانع الكهربائية تقوم الشركة بإنتاج مكبر لصوت شديد الحساسية لأغراض خاصة وتعتمد حساسية الجهاز أساساً على كفاءة مكثف صغير يتكلف جنيه مصرى واحد . ولكن فى حالة عدم صلاحية المكثف واكتشاف الخطأ فى التجارب الأخيرة بعد إنتهاء التجميع - تتكلف عملية الإصلاح ستة جنيهات - ويمكن للشركة إجراء إختبار للمكثف قبل تركيبه وتستطيع هذه الطريقة أن تكشف أربعة مكثفات من خمسة معيبة ولكن تكلفة الأختبار تصل إلى ١,٥ جنيه . وهناك طريقة أبسط لإختبار المكثفات كلها تؤدى إلى تلف مكثف فى المتوسط كل عشرة مكثفات . كما يمكن للشركة قبول عرض أحد الموردين الذى يمكنه أن يمد الشركة بمكثفات مضمونة وغير معيبة إطلاقاً بسعر ٣ جنيهات للوحدة .

ما هو أفضل نظام تتبعه الشركة ؟

باعتبار الإحصائى أو الشركة بأنها اللاعب (ب) والطبيعة اللاعب (ا) . واللاعب (ب) يلعب ضد خصمه الطبيعية والتى تتلخص استراتيجيتها فى بديلين

$ا_1$ ≡ المكثف صالح أو $ا_2$ ≡ المكثف معيب

بينما استراتيجية الاعب ب هى :

$ب_1$ ≡ الإختبار بعد التجميع $ب_2$ ≡ الإختبار المكلف

$ب_3$ ≡ الإختبار البسيط $ب_4$ ≡ المكثف المضمون

استراتيجية الشركة

استراتيجية الطبيعة

	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$
$أ_1$	١	(١+٥و١=٥و٢)	١٠	٣
$أ_2$	٦	$\frac{1}{5}$ (٤ + ٦)+٥و١)	١	٣

ومن ثم يكون لدينا مصفوفة الدفع التالية :

	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$	أقصى أدنى
$أ_1$	١	٥و٢	١٠	٣	١
$أ_2$	٦	٥و٣	١	٣	١
أدنى أقصى	٦	٥و٣	١٠	٣	

ونظرا لأن أقصى ادنى ≠ أدنى أقصى فإننا نستخدم الاستراتيجيات المختلطة

ومسألة الطبيعة هى :

تعظيم ع مستوفيه

$س_1 + ٦س_2 \geqslant ع$

$٥و٢س_1 + ٥و٣س_2 \geqslant ع$

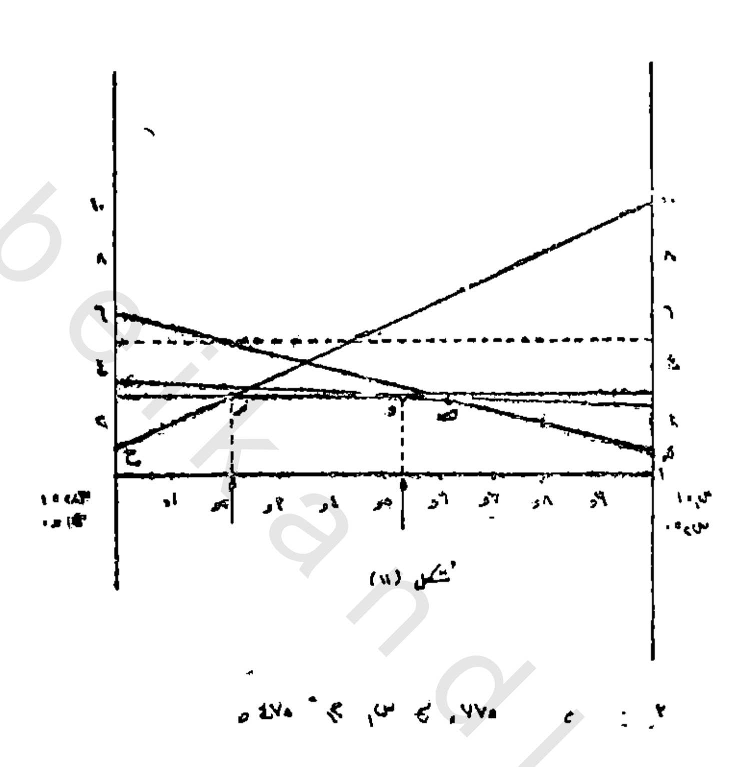
$١٠س_1 + ١س_2 \geqslant ع$

$٣س_1 + ٣س_2 \geqslant ع$

$س_1 + س_2 = ١$

ع = ٤,٠٦ هـ

ويمكن حل المباراة بيانيا فى الشكل التالى :



شكل (١١)

٢ : ع ،٧٧٥ ع س١ ٣ ،٤٧٥ ص

أما استراتيجية الشركة فى إختيار نظام التفتيش العشوائى والذى يعطى بالبرنامج :

تدنية : ع مستوفيا :

ص١ + ٢,٥ص٢ + ١٠ص٣ + ٣ص٤ ≥ ع

٦ص١ + ٢,٥ص٢ + ص٣ + ٢ص٤ ≥ ع

ص١ + ص٢ + ص٣ + ص٤ = ١

وبالتعويض ع = ٢ نحصل على ص١ = ص٢ = ص٣ = صفر ، ص٤ = ١

أى أفضل استراتيجية هى استخدام المكثف مرتفع الثمن والاستغناء تماما عن التفتيش العشوائى . والواقع أن ذلك نشأ من إنخفاض سعر المكثف المكالف فإذا كان السعر مثلا ٥ جنيهات بدلا من ثلاثة (الخط المنقط فى شكل ١١) فإن

ع = ٣٫٢٥ وهى تناظر $ص_1 = ٠$ ، $ص_2 = ٠٫٩$ ، $ص_3 = ٠٫١$ ، $ص_4 = ٠$

وتصبح استراتيجية الشركة هى استخدام نظاما للتفتيش العشوائى يقوم على أساس استخدام طريقة التفتيش المرتفعة الثمن بنسبة ٩٠ ٪ . واستخدام طريقة التفتيش منخفضة التكاليف بنسبة ١٠ ٪ . وتكون التكلفة المتوسطة ع = ٣٫٢٥ .

(٥ – ٧ – ٤) النظرية الاقتصادية :

يمكن استخدام نظرية المباريات لتحديد مفهوم توازن السوق فى حالة الاحتكار الثنائى . حيث يعتبر السوق مقسم بين مشروعين كل يأخذ دور اللاعب واعتبار المباراة لفردين ذات حاصل صفرى . فإذا أمكن تحديد استراتيجية كل مشروع ولكل إختيار مفتوح لأى من اللاعبين أمكن إيجاد ربح المشروعين والذى يساوى تماما خسارة المشروع الآخر أمكن استخدام نظرية المباريات فى تحديد توازن السوق . إفترض أن استراتيجيات المشروعين أمكن تلخيصها فى مصفوفة لدفع (الربح) التالية :

المشروع الثانى
الاستراتيجيات

	(١)	(٢)	(ن)
(١)	(ك١١)	ك٢١	ك١ن
(٢)	(ك١١)	ك٢١	ك١ن
(٣)	(ك١٠)	ك٢٢	ك٢ن
.			
.			
م	كم١	ك١م	ك ن

المشروع الأول (الاستراتيجيات)

حيث كو ر ماربحه المشروع الاول نتيجة اختياره استراتيجية و واختيار المشروع الثانى استراتيجية ر . وأما مصفوفة الدفع للمشروع الثانى فعناصرها (كو ر) . وإذا طبقنا نتائج نظرية المباريات فإن إختيار المشروع الاول للاستراتيجية يتحدد بـ أقصىو أدنى ر [كو ر]

وإختيار المشروع الثانى للاستراتيجية يتحدد من :

أدنى ر أقصىو [كو ر]

فإذا كان :

أقصىو أدنى ر = أدنى ر أقصىو

حدث إتزان السوق عند استراتيجيات حرة لكلا المشروعين أما إذا كان :

أقصىو أدنى ر = أدنى ر أقصىو

فإن الاتزان لا يحدث إلا بإختيار استراتيجيات مختلطة هى نسب استخدام كل مشروع للاستراتيجية المفتوحة أمامه :

إفترض س و ≥ صفر نسب إستخدام الاستراتيجيات المختلفة فى المشروع الأول حيث مجـ س و = ١ . وأن ص ر ≥ صفر نسب استخدام الاستراتيجيات المختلفة للاعب الثانى حيث مجـ ص ر = ١ فإن مسألة المشروع الأول هى :

تعظيم ع مستوفيا

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{و}}\, \text{ك}_{\text{و ر}} \geqslant \text{ع} \\ \text{ر} = 1 ، \ldots ، \text{ن} \\ \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{و}} = 1 \end{array}\right\} \quad (٦٨)$$

ومسألة المشروع الثانى هى :

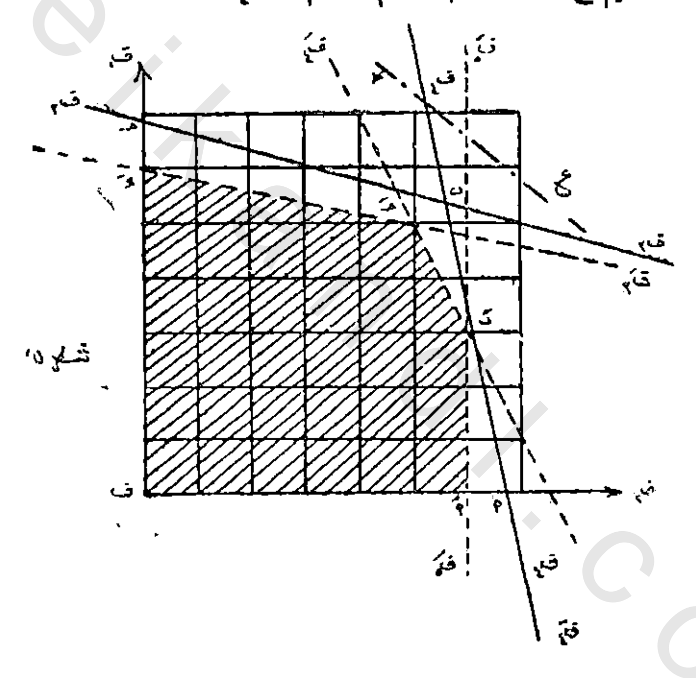
تدنية ع مستوفيا

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}\, \text{ك}_{\text{و ر}} \leqslant \text{ع} \\ \text{و} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{م} \\ \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}} = 1 \end{array}\right\} \quad (٦٩)$$

٦ — البرمجة الخطية العددية

(٦ — ١) تقديم :

البرمجة الخطية العددية* هى مسألة برمجة خطية عادية ببعض القيود الإضافية التى تهدف إلى قصر الحل الأمثل على أخذ قيم غير سالبة عددية وفى شكل (١) المطلوب تعظيم ع مستوفيا ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ ، ق$_4$.



---

(1) Hamdy Taha « Integer Programming » Memo - 536 The Institvte of National Planning Feb. 1965

(2) Hadly « Non - Linear and dynamic Programming » Addison Welsly 1964

(3) Tc Hu « Integer Programming and Net Work Flow« Addison Welsly 1969

(4) Wagner « Principles of Operations Resaerch » 1975

الحل الأمثل لهذه المسألة فى حالة عدم وجود شرط القيود العددية هى عند النقطة ب التى تمثل تقاطع القيدين $ق_٣$ ، $ق_٤$ ولكى نحصل على حل يحقق شرط العددية يجب علينا أن نحدد منطقة الحلول العددية داخل المنطقة المحدبة الأصلية ا ب حـ ى الناتجة عن القيود $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ وهى الغلاف المحـدب اَ بَ حـَ دَ ى وبذلك تكون مسألة البرمجة مناظرة لتعظيم ع مستوفيا $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $قَ_٣$ ، $قَ_٤$ ، $قَ_٥$.

ومن المهم أن نلاحظ فى شكل (١) أن المنطقة المحدبة الجديدة تحتوى على قيم عددية فى كل نقطها الركنية أو القصوى وعلى هذا فإن الحل الأمثل يكون بالضرورة حل عددى .

مما سبق نخلص إلى أنه للحصول على حلول عددية لمسألة البرمجة الخطية يلزمنا إضافة قيود هدفها أن تنكمش المنطقة المحدبة للقيود الأصلية إلى غلاف محدب له نقط ركنية عددية .

ولهذا فإن طرق البرمجة العددية هى فى الواقع طرق توليد قيود إضافية لتنقطع منطقة الإمكانيات الأصلية إلى غلاف محدب ذو نقط قصوى بقيم عددية . ويجب لأى طريقة أن توفر الشروط التالية :

١ - القيود الإضافية لا تستبعد من منطقة الإمكانيات أى نقطة عددية فى منطقة الإمكانيات الأصلية .

٢ - القيود الإضافية المولدة تكون كافية للحصول على مسألة برمجة خطية معدلة ذات حلول عددية فى عدد محدود من المراحل .

٣ - القيود المولدة تمر على الأقل بنقطة عددية واحدة .

٤ - إضافة إى قيد مولد يؤدى إلى انكماش فى منطقة الإمكانيات الأصلية

(٦ — ٢) طرق البرمجة العددية (*):

مسألة البرمجة العددية التي نحن بصدد دراستها هي :

أجعـــل :

$$س_{.} = ا_{.} - ا_{١.}س_{١} - ا_{٢.}س_{٢} - \cdots - ا_{ن}س_{ن}$$

أكبر ما يمكن

مستوفيا الشروط التالية :

(١)

$$س_{ن+١} = ا_{ن+١،٠} - ا_{ن+١،١}س_{١} - ا_{ن+١،٢} - \cdots - ا_{ن+١،ن}س_{ن}$$

. . . .

$$س_{ن+م} = ا_{ن+م،٠} - ا_{ن+م،١}س_{١} - ا_{ن+م،٢}س_{٢} - \cdots - ا_{ن+م،ن}س_{ن}$$

$$س_{ر} \geqslant صفر$$

$$ر = ١ ، ٢ ، \cdots ، ن ، \cdots ، ن + م$$

$$س_{ر} = قيم\ صحيحة \qquad ر = ١ ، \cdots ، ن$$

ويلاحظ أننا في الصياغة المذكورة في (١) أجرينا التحويلات التالية للمعاملات في مسألة البرمجة الخطية التقليدية :

$$ا_{..} = ٠ ، س_{.} = ع ، ا_{ن+و،٠} = ب_{و} ، ا_{ن+و،ر} = \bar{ا}_{و ر}$$

(*) Gomory R. E. « An Algorithm for Integer Solution to Linear Programs « Princet on I. B. M. Res. Repcrt NOV. 1958.

« All Integer Programming Algorithm » I, B. M. Res Repert Aah 1960

« An Algorithm For The Mixed Integer Problem » Rand Report Feb. 1960

وذلك لأننا سوف نضيف مجموعة المعادلات الإضافية :

س ر = − (− س ر)　　　　　　　　　　　　(٢)

والتعبير عن المتغير س ر بدلالة − س ر نشأ تاريخنا مع التكنيك وأصبح صورة تقليدية فى مسائل البرمجة الخطية العددية ولتوضيح المسألة المطروحة فى (١) ، (٢) يمكننا تمثيل المسألة فى الجدول (١) التالى .

← ر	١	− س١	− س٢	− سن
س	أ..	أ١	أ٢.	أن
س١	صفر	− ١	صفر	صفر
س٢	صفر	صفر	− ١	صفر
⋮				
سن	صفر	صفر	صفر	− ١
سن+١	أن+١،٠	أن+١،١	أن+١،٢	أن+١،ن
سن+٢	أن+٢،٠	أن+١.١	أن+٢،٢	أن+٢،ن
—				
سن+م	أن+م،٠	أن+م،١	أن+م،٢	أن+م،ن

و↓

جدول (١)

شكل المعاملات فى مسألة البرمجة العددية

وسوف يستخدم الرمز أ ر للدلالة على متجه العامود الواقع أسفل ر . والرمز أو ر للدلالة على المعامل الواقع أسفل العامود (ر) فى الصف و . سوف نفترض أن قيم أو ر قيم صحيحة فى جدول الحل الإبتدائى بما فى ذلك معاملات المتغيرات العاطلة وهو شرط يمكن دائماً تحقيقه .

(٦ – ٢ – ١) طريقة الكسور لجوموري لحل مسألة البرمجة الخطية العددية*

Fractional Integer Programming

تتلخص طريقة جوموري فى حل مسألة البرمجة الخطية العددية كمسألة برمجة خطية عادية بإستخدام طريقة السمبلكس • وفى نهاية الحل يكون لدينا قيم س و [وهى القيم المناظرة المعاملات او ل ≥ صفر و = ١ ، ٢ ، ... ، ن + م فى الجدول الأخير (ل)] وكذلك قيم ع ر – حـ ر [وهى القيم المناظرة المعاملات ا ر ≥ صفر ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن + م فى الجدول الأخير (ل)] فإذا كانت او ل ≥ صفر ، قيم عددية (أعداد صحيحة) فيكون الحل السابق هو الحل الأمثل لمسألة البرمجة العددية . فإذا لم يتوفر الشرط السابق يضاف قيد يسمى قاطع جوموري مدلولة و = (ن + م + ١) فى نهاية الجدول تكون له قيم او < صفر المدلول و = ن + م + ١ وبذلك يكون جدول غير عملى Infeasible Tableau ثم يتم إجراء تعديل بإستخدام طريقة السمبلكس الثنائية للحصول على او ≥ صفر فإذا كانت او ل+ ١ أعداد صحيحة يكون الحل أمثل إما إذا لم يتوفر ذلك إضيفت قيود أخرى وذلك للحصول على او ≥ صفر ، او = قيم عددية :

الخطوة الأولى :

حل مسألة البرمجة الخطية العددية كمسألة برمجة خطية عادية بإستخدام طريقة السمبلكس وفى الجدول الأخير الذى هو جدول الحل الأمثل يكون لدينا او ل ≥ صفر و = ١ ، ٢ ، ... ، ن + م وكذلك ال ر ≥ صفر

ر = ١ ، ١ ، ٠ ، .. ، ن

---

* مرجع سابق

Gomory, R. E.

الخطـوة الثانية :

إذا كان $ا_{و ل}$ أعداد صحيحة فالحل الذى حصلنا عليه هو الحل الأمثل المطلوب لمسألة البرمجة العددية فإذا لم يتوفر ذلك يضاف قاطع جومورى على النحو التالى :

أفترض أن $ا_{و ل}$ هى أول قيمة غير عددية فى العامود $ا_{ل}$. يسمى الصف (و) فى هذه الحالة الصف المولد للقيد أو صف المصدر . أضف القيد .

$$ك_{و ل} = - ف_{و ل} - مج ف_{ل و ر} (- س_{ن ل}) \quad (٣)$$

$$١ > ف_{و ٠} > صفر \quad ، \quad ١ > ف_{و ر} > صفر$$

فى نهاية جدول الحل الأمثل (ل) وأجرى خطوة سمبلكس ثنائية

الخطوة الثالثة :

كرر العمل حتى تحصل على جميع قيم $ا_{و}$ أعداد صحيحة موجبة

لقد استنتج جومورى القيد (٣) بالطريقة التالية :

$$\text{لما كانت} \quad س_{ن و} = ا_{و ٠} + مج ا_{و ر} (- س_{ن ر}) \quad (٤)$$

وبفرض أن $ا_{و ٠}$ ، $ا_{و ر}$ أعداد غير صحيحة فإنه يمكننا أن نكون العلاقات التالية :

$$\left. \begin{array}{l} ا_{و ٠} = ت_{و ٠} - ف_{و ٠} \\ ا_{و ر} = ت_{و ر} - ف_{و ر} \end{array} \right\} \quad (٥)$$

حيث $ت_{و ٠}$ ، $ت_{و ر}$ أكبر عدد صحيح موجب أصغر أو يساوى $ا_{و ٠}$ ، $ا_{و ر}$ على التوالى . ومن ثم فإن $ف_{و ٠}$ ، $ف_{و ر}$ هى كسور موجبة أي أن :

$ف_و ، ف_{ور} > صفر$

وبالتعويض فى المعادلة (٤) بدلاله (٥) فإن :

$$س_و = (ت_و - ف_و) + مجـ (ت_{ور} - ف_{ور}) (- س_ر) \quad (٦)$$

ومنهما :

$$ف_و + مجـ ف_{ور} س_ر = س_و - ت_و + مجـ ت_{ور} س_ر \quad (٧)$$

ولما كان الطرف الإيسر يحتوى على أعداد صحيحة فإنه لأى قيم صحيحة $س_ر$ ، $س_و$ فإن الطرف الأيمن يكون أيضاً قيم صحيحة :

إذا كانت $ف_و$ > صفر ونظراً لأنها كسر فإن :

$$صفر > - ف_و > - ١ \quad (٨)$$

ومنها نستنتج من المعادلة (٧) أن :

$$مجـ ف_{ور} س_ر \geq صفر \quad (٩)$$

ومن المعادلات ٩ ، ١٠ ، فإنه عندما تكون $س_ر$ عدد صحيح فإن :

$$- ف_و + مجـ ف_{ور} س_ر = عدد صحيح > - ١ \quad (١١)$$

ومن ذلك نتوصل إلى القيد :

$$ك_ل = ف_{ول} - \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ف_{لر} (- س_ر) \quad (١٢)$$

الذي يتحقق لأى حل عددي .

وسوف نوضح الخطوات السابقة بالمثال التالى :

أجمل $س. = ٤س_١ + ٥س_٢ + س_٣$

أكبر ما يمكن مستوفيا

$$٣س_١ + ٢س_٢ \quad \leq ١٠$$

$$س_١ + ٤س_٢ \quad \leq ١١$$

$$٣س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \leq ١٢$$

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ أعداد صحيحه $\geq$ صفر

الخطوة الأولى :

بإضافة المتغيرات العاطلة نحصل على :

$$س = ٤س_١ + ٥س_٢ + س_٣ + صفر س_٤ + صفر س_٥ + صفر س_٦$$

مستوفيا

$$٣س_١ + ٢س_٢ \quad + س_٤ \quad = ١٠$$

$$س_١ + ٤س_٢ \quad + س_٥ \quad = ١١$$

$$٣س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \quad + س_٦ = ١٢$$

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ أعداد صحيحة $\geq$ صفر

وبإضافة مجموعة المعادلات الإضافية :

$$س_١ = -(-س_١)$$

$$س_٢ = -(-س_٢)$$

$$س_٣ = -(-س_٣)$$

يمكننا تكوين جدول الحل الإبتدائى الموضح فى جدول (٢) (جدول السمبلكس المعدلة)

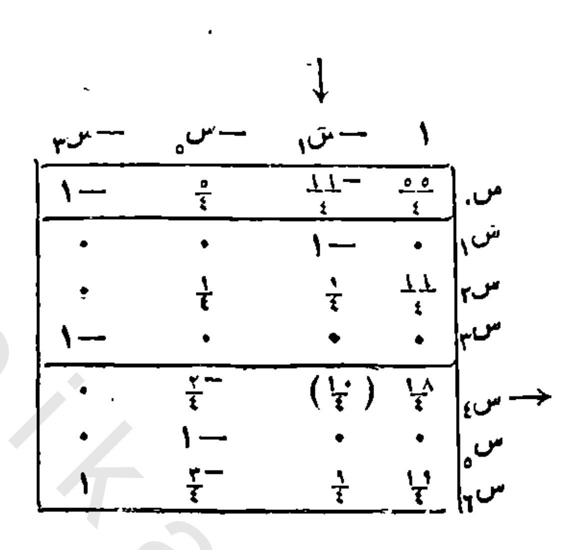
	١	$-$س١	$-$س٢ ↓	$-$س٣
س٠	٠	$-$٤	$-$٥	$-$١
س١	٠	$-$١	٠	٠
س٢	٠	٠	$-$١	٠
س٣	٠	٠	٠	$-$١
س٤	١٠	٣	٢	٠
← س٥	١١	١	(٤)	٠
س٦	١٢	٣	٣	١

جدول (٢)

ويمثل جدول (٢) جدول الحل الابتدائى وأقل قيمة لـ ع ر − حـ ر عند (− ٥) وبذلك يكون س٢ المتغير هو الذى يدخل الحل والمتغير الذى يخرج من الحل يتحدد من :

$$\text{أدنى}\left(\frac{١٠}{٢}\ ،\ \frac{١١}{٤}\ ،\ \frac{١٢}{٣}\right) = \frac{١١}{٤}$$

وبذلك يكون المتغير الذى يخرج من الحل هو س٥ والمفصلي = ٤ ويعطي الجدول الجديد (٣) .



	١	$-ق_{١}$ ↓	$-س_{٥}$	$-س_{٣}$
ص.	$\frac{٥٥}{٤}$	$-\frac{١١}{٤}$	$\frac{٥}{٤}$	-١
$ق_{١}$	٠	-١	٠	٠
$س_{٢}$	$\frac{١١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	٠
$س_{٣}$	٠	٠	٠	-١
← $س_{٤}$	$\frac{١٨}{٤}$	$(\frac{١٠}{٤})$	$-\frac{٢}{٤}$	٠
$س_{٥}$	٠	٠	-١	٠
$س_{٦}$	$\frac{١٩}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{٣}{٤}$	١

جدول (٣)

وفى الجدول (٣) $ع_{١} - حـ_{١} = -\left(\frac{١١}{٤}\right)$ وبذلك يكون $س_{١}$ هو المتغير الذى يدخل فى الحل . والمتغير الذى يترك الحل هو :

$أدنى_{و}$ $\left(١١ ، \frac{١٨}{١٠} ، \frac{١٥}{٩} \right) = \frac{١٨}{١٠}$ أي عند و = ٤ ويكون $س_{٤}$ هو المتغير الذي يترك والمفصل $= \frac{١٠}{٤}$. وبإجراء التعديل نحصل علي الجدول (٤)

	١	−س٤	−س٥	−٣ ↓
س.	١٨٧/٣٠	١١/٣٠	−٧/٣٠	−١
س١	١٨/٣٠	٤/٣٠	−٢/٣٠	٠
س٢	٢٣/٣٠	−١/٣٠	٣/٣٠	٠
س٣	٠	٠	٠	−١
س٤	٠	−١	٠	٠
س٥	٠	٠	−١	٠
→ س٦	٧/٣٠	−٩/٣٠	٣/٣٠	(١)

جدول (٤)

ومنه نحصل على جدول (٥)

	١	−س٤	−س٥	−س٦
س.	١٩٤/٣٠	٢/٣٠	٤/٣٠	١
س١	١٨/٣٠	٤/٣٠	−٢/٣٠	٠
س٢	٢٣/٣٠	−١/٣٠	٣/٣٠	٠
س٣ ← الصف المولد	٧/٣٠	−٩/٣٠	−٣/٣٠	١
س٤	٠	−١		٠
س٥	٠	٠	−١	١٠
س٦	٠	٠	٠	−١

جدول (٥)

ونلاحظ فى جدول (٥) أن جميع قيم ع.ر − حـ.ر = ال.ر > صفر

لذلك فالحل الأمثل وفيه ع = س. = $\frac{١٩٤}{١٠}$ ، س١ = $\frac{١٨}{١٠}$

، س٢ = $\frac{٢٣}{١٠}$ ، س٣ = $\frac{٧}{١٠}$

الخطوة الثانية :

الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية العادية تحتوى على كسور لذلك يلزم إضافة قيد جومورى . وسوف نستخدم الصف و = ٣ لتوليد قيد جومورى .

$$س_٣ = \frac{٧}{١٠} - \frac{٩}{١٠}(-س_٤) - \frac{٣}{١٠}(-س_٥) + ١(-س_٦)$$

$$= (ت_{٣٠} - ف_{٣٠}) + (ت_{٣٤} - ف_{٣٤})(-س_٤)$$

$$+ (ت_{٣٥} - ف_{٣٥})(-س_٥) + (ت_{٣٦} - ف_{٣٦})(س_٦)$$

ونظراً لأن ت٣. ، ت٣ر طبقا لقيد جومورى هى أكبر أعداد صحيحة تساوى أكبر عدد صحيح موجب أصغر أو يساوى ف٣. ، ف٣ر

ينتج من ذلك أن :

ت٣. = صفر ، ت٣٤ = −١ ، ت٣٥ = −١ ، ت٣٦ = ١

ومنها نستنتج أن :

$$ف_{٣٠} = -\frac{٧}{١٠} ، ف_{٣٤} = -\frac{١}{١٠} ، ف_{٣٥} = -\frac{٧}{١٠} ، ف_{٣٦} = صفر$$

ويكون قيد جومورى :

$$ك_{٣} = ف_{٣٠} + ف_{٣٤}(-س_{٤}) + ف_{٣٥}(-س_{٥}) + ف_{٣٦}(-س_{٦})$$

$$ك_{٣} = -\frac{٧}{١٠} - \frac{١}{١٠}(-س_{٤}) - \frac{٧}{١٠}(-س_{٥}) + صفر(-س_{٦})$$

وبإضافة هذا القيد فى الصف الأخير من جدول الحل الأمثل نحصل على جدول (٦) التالى :

	١	$-س_{٤}$	$-س_{٥}$ ↓	$-س_{٦}$
$س_{٠}$	$\frac{١٩٤}{٣٠}$	$\frac{٢}{٣٠}$	$\frac{٤}{٣٠}$	١
$س_{١}$	$\frac{١٨}{٣٠}$	$\frac{٤}{٣٠}$	$-\frac{٢}{٣٠}$	٠
$س_{٢}$	$\frac{٢٣}{٣٠}$	$-\frac{٢}{٣٠}$	$\frac{٣}{٣٠}$	٠
$س_{٣}$	$\frac{٧}{٣٠}$	$-\frac{٩}{٣٠}$	$-\frac{٣}{٣٠}$	١
$س_{٤}$	٠	−١	٠	٠
$س_{٥}$	٠	٠	−١	٠
$س_{٦}$	٠	٠	٠	−١
← و = ٧ $ك_{٣}$	$-\frac{٧}{٣٠}$	$-\frac{١}{٣٠}$	$(-\frac{٧}{٣٠})$	٠

جدول (٦) - إضافة قاطع جومورى

ويلاحظ من هذا الجدول أن $أ_{٧} = -\frac{٧}{١٠} < صفر$. وبذلك يكون

الجدول (٦) جدول غير عملى وتجرى له خطوة السمبلكس الثنائية فيكون $ك_{٣}$ هو المتغير الذى يترك الحـــل ويحدد المتغير الذى يترك الحل من العلاقة

اكبر

$$\left[\frac{ع_ر - ح_ر}{او_ر}\right] \text{ لقيم او}_ر \text{ السالبة فقط أى أكبر}_ر \left[\left(\frac{٢}{١٠} \div -\frac{١}{١٠}\right)\right] ،$$

$$\left[\left(\frac{٤}{١٠} \div \frac{-٧}{١٠}\right)\right] = \text{أكبر}_ر \left(-٢ ، \frac{-٤}{٧}\right) = \frac{-٤}{٧} \text{ عند ر} = ٥$$

ويكون المتغير الذى يدخل الحل هو $س_٥$ ليحل محل $ك_٣$ والمفصل $= \frac{-٧}{١٠}$. ويمثل جدول (٧) هو الجدول بعد التعديل حيث يعطى الحل الآتى :

$ع = ١٩ = س_٠$

$س_١ = ٢$

$س_٢ = ٢$

$س_٣ = ١$

ويلاحظ أن الحل الناتج هو حل عددى لذلك فجدول (٧) هو جدول الحل الأمثل المطلوب ومن المهم أن نلاحظ أن قيمة ع = ١٩ فى حالة استيفاء قيد العددية أقل من ع = ١٩٫٤ فى حالة عدم التقييد بشرط العددية .

	١	— س٤	— س٢	— س٦
س	١٩	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	١
س١	٢	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	صفر
س٢	٢	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	صفر
س٣	١	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	١
س٤	٠	— ١	٠	٠
س٥	١	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	٠
س٦	٠	٠	٠	— ١
ك٢	٠	٠	— ١	٠

جدول (٧) جدول الحل الأمثل العددى

(٩ — ٢ — ٢) البرمجة العددية الكلية : All Integer Programming

فى هذه الطريقة إذا بدأنا بجدول حل إبتدائى يحتوى على قيم عددية إحتفظ الحل بخاصيته العددية فى كل التعديلات التالية :

ونستخدم السمبلكس الثنائية فى الحل فإذا كانت او٠ ⩾ صفر لجميع قيم و = ١ ، ٢ ، ٠٠ ، ن+م وكانت القيم أعداد صحيحة نكون قد حصلنا على الحل المطلوب فى الخطوة ل .

إذا كان أحد الصفوف و = ر له قيمة ار٠ < صفر . يستلزم ذلك إضافة قيد فى نهاية الجدول ليكون الصف المفصلى ثم تطبق طريقة السمبلكس الثنائية وفى هذه الحالة يكون الصف المفصلى يحتوى على معاملات صحيحة كلها وتكون قيمة المفصل (— ١) وبهذا يحتفظ الحل بخاصية العددية دائما .

ومن المهم أن نفرق أن الفرق الرئيسى بين هـذه الطريقة وطريقة الـكسور المشروحة فى البند السابق أن الصف المولد فى الحالة السـابقة كان الصف و الذى قيمه $\text{أ}_{\text{٠}}$ غير عددية . بينما فى حالتنا يـكون للصف و الذى له قيمة $\text{أ}_{\text{٠}} < \text{صفر}$.

ولتوضيح المفاهيم الرئيسية لهذه الطريقة الهامة فإن مسألة البرمجة العددية التى ندرسها هى :

تعظيم :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{س}_{\text{٠}} = \text{أ}_{\text{٠٠}} + \text{مج}\ \text{أ}_{\text{٠ر}} (-\text{س}_{\text{ر}}) & \\
\text{مستوفيا} & \\
\text{س}_{\text{١}} = -(-\text{س}_{\text{١}}) & \geqslant \text{٠} \\
\text{س}_{\text{٢}} = -(-\text{س}_{\text{٢}}) & \geqslant \text{٠} \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\text{س}_{\text{ن}} = -(-\text{س}_{\text{ن}}) & \geqslant \text{٠} \\
\text{س}_{\text{ن+١}} = \text{أ}_{\text{ن+١،٠}} + \text{مج}\ \text{أ}_{\text{ن+١،ر}} (-\text{س}_{\text{ر}}) & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\text{س}_{\text{ن+م}} = \text{أ}_{\text{ن+م،٠}} + \text{مج}\ \text{أ}_{\text{ن+م،ر}} (-\text{س}_{\text{ر}}) &
\end{array}
\right. \qquad (\text{١٣})
$$

وبالتالى يمكن كتابتها :

$$
\text{س}^{\text{ل}} = \text{أ}^{\text{ل}} \left(-\text{س}^{\text{ل}}_{\text{ن}}\right) \qquad (\text{١٤})
$$

حيث ل مرحلة الحل . وفى جدول الحل الإبتدائى عند ل = صفر تكون جميع قيم $\text{أ}_{\text{٠ر}}$ أعداد صحيحة وكل أعمدة المتجهات $\text{أ}_{\text{ر}}$ ، ر = ١ ، ... ، ن موجبة .

سوف نرمز الآن بالرمز ت(س) ليدل على أكبر عدد صحيح موجب أصغر من أو يساوى س .

ويلاحظ أن لأى رقم ص (سالب أو موجب) ولأى رقم موجب هـ فإن العلاقة التالية صحيحة :

$$ص = هـ ت\left[\frac{ص}{هـ}\right] + ق_س \qquad (١٥)$$

حيث :

$ق_س$ هو باقى خارج قسمة المقدار $\frac{ص}{هـ}$ ، $هـ \geqslant ق_س \geqslant صفر$

والمعادلة (١٥) هى الفكرة الرئيسية فى البرمجة العددية الكلية .

فى المعادلة (١٥) إذا اشترطنا أن خارج القسمة يكون عدد صحيح وأن المقدار الباقى يكون موجب وفى الحالة الخاصة عندما يكون العدد ص = ١

فإن :

$$١ = هـ ت\left[\frac{١}{هـ}\right] + ق \qquad (١٦)$$

ومن المعادلة (١٦) نستنتج أن

$$(١٧) \begin{cases} \text{إذا كان } هـ > صفر \text{ فإن : } ت\left[\frac{١}{هـ}\right] = صفر \text{ ، } ق = ١ \\ \text{إذا كان } هـ = ١ \text{ فإن : } ت\left[\frac{١}{هـ}\right] = ١ \text{ ، } ق = صفر \end{cases}$$

أى أن متغير س يعبر عنه فى حالتنا بالعلاقة :

$$\text{س} = \text{ا}_{.} + \sum \text{ا}_{.\text{ر}} \left(- \text{س}_{.\text{ر}} \right) \qquad (١٨)$$

حيث س.ر المتغيرات الغير أساسية فى الحل ويمكن التعبير عن س ، ا. ، ا.ر . وذلك بالضرب المسبق للمعادلة (١٦) فى س

$$\text{س} \times ١ = \text{س} \left[\text{هـ ت} \left[\frac{١}{\text{هـ}} \right] + \text{ق} \right] \qquad (١٩)$$

كذلك بالتعويض عن : ص = ا.ر فى (١٥) فإن :

$$\text{ا}_{\text{ر}} = \text{هـ ت} \left[\frac{\text{ا}_{.\text{ر}}}{\text{هـ}} \right] + \text{ق}_{\text{ر}} \qquad (٢٠)$$

وبالتعويض من المعادلات (١٩) ، (٢٠) فى (١٨) فإن :

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}_{.\text{ر}}\, \text{س}_{.\text{ر}} + \text{ق س} = \text{ق}_{.} + \text{هـ} \Bigg\{ \text{ت} \left[\frac{١}{\text{هـ}} \right] + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ت} \left[\frac{\text{ا}_{.\text{ر}}}{\text{هـ}} \right] \left(- \text{س}_{.\text{ر}} \right) + \text{ت} \left[\frac{١}{\text{هـ}} \right] \left(- \text{س} \right) \Bigg\} \qquad (٢١)$$

ولما كانت ق ، ق.ر ⩾ صفر ، كذلك س ، س.ر غير سالبة فالطرف الأيسر من المعادلة (٢٩) يكون غير سالب . وبذلك يمكن التعبير عن المقدار داخل القوس { } فى المعادلة (٢١) على صورة متغير إضافى عاطل ك على الصورة :

$$\text{ك} = \text{ت} \left[\frac{١}{\text{هـ}} \right] + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ت} \left[\frac{\text{ا}_{.\text{ر}}}{\text{هـ}} \right] \left(- \text{س}_{.\text{ر}} \right) + \text{ت} \left[\frac{١}{\text{هـ}} \right] \left(- \text{س} \right) \qquad (٢٢)$$

وفى المعادلة (٢٢) يكون ل مقدار صحيح موجب . فإذا كانت ل عـــدد صحيح سالب أى — ١ ، — ٢ ، فعلى سبيل المثال فإن الضرب فى هـ حيث هـ > ق. سوف يجعل الطرف الأيسر المعادلة (٢١) سالب بينما الطرف الأيمن موجب .

وسوف ندرس الحالة التى فيها هـ = ١ ، هـ ≠ ١ كل على حده :

وفى الحالة الأولى التى فيها هـ = ١ فإن :

$$\text{ت}\left[\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{هـ}}\right] = \text{ت}\left[\text{ا}_{\text{ر}}\right] = \text{ت}\left[\frac{\text{١}}{\text{هـ}}\right] \qquad (\text{٢٣})$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢٢) وإستخدام (١٨) فإن :

$$\text{ل} = \text{ت}[\text{ا}_{.}] + \text{مجـ}\ \text{ت}[\text{ا}_{\text{ر}}](-\text{س}_{\text{ر}}) - \{\text{ا}_{.} + \text{مجـ}\ \text{ا}_{\text{ر}}(-\text{س}_{\text{ر}})\}$$

$$\text{ل} = -\text{ف}_{.} + \text{مجـ}\ \text{ف}_{\text{ر}}(-\text{س}_{\text{ر}}\text{ل}) \qquad (\text{٢٤})$$

والمعادلة (٢٤) هى نفس المعادلة (١٢) للقيد المكسور لقاطع جومورى .

وفى الحالة الثانية عندما هـ > ١ فإن :

$$\text{ت}\left[\frac{\text{١}}{\text{هـ}}\right] = \text{صفر}$$ ويؤول القيد (٢) إلى :

$$\text{ل} = \text{ت}\left[\frac{\text{ا}_{.}}{\text{هـ}}\right] + \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}}\ \text{ت}\left[\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{هـ}}\right](-\text{س}_{\text{ر}}) \qquad (\text{٢٥})$$

لذلك فإن المعادلة (٢٥) يجب أن تتحقق لأى حل عددى ممكن المسألة المطروحة فى (١٣) . وبالتالى فهى القيد المفصلى المطلوب .

وعادة فإنه لأى قيمة $ا_{٠ر}$ > صفر يمكن إختيار (هـ) ذات قيمة كبيرة كبراً مناسبا لتجعل قيمة ت $\left[\frac{ا_{٠ر}}{هـ}\right]$ فى المعادلة (٢٥) تساوى — ١ وسوف يؤدى هذا إلى الحصول على جدول له قيم عددية .

وتحتاج الطريقة إلى حل إبتدائى للسمبلكس الثنائية الذى يمكن دائما تحقيقه بإضافة القيد :

$$س_{ن+م+١} = ك - س_{١} - س_{٢} - \cdots - س_{ن} \geqslant صفر$$

حيث ك ثابت ذو قيمة كبيرة ويكون هذا القيد هو الصف المفصلى .

ويمكن تلخيص الطريقة السابقة فى الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى :

إبداء بمصفوفة ذات قيمة صحيحة [ا.] والتى يجب أن تكون مصفوفة عملية من الناحية الثنائية .

الخطوة الثانية :

للقيم التى بها $ا_{و.} <$ صفر ، و = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، م + ن . إختار الصف الذى له أقل مداول و . واعتبره هذا الصف المولد . فإذ حصلت على $ا_{و.} >$ صفر لجميع قيم و . تكون قد توصلت إلى الحل . إذا لم يتوفر ذلك أنتقل إلى الخطوة الثالثة .

الخطوة الثالثة :

إختار هـ > صفر وأضف القيد :

$$ل = ت \left[\frac{ا_{و.}}{هـ}\right] + \sum_{ت} \left[\frac{ا_{و.}}{هـ}\right] (-س_{ر})$$

ويكون هذا القيد هو الصف المفصلى .

الخطوة الرابعة :

أجرى تعديل للجدول الناتج من الخطوة السابقة بإستخدام السمبلكس الثنائية ثم أرجع إلى الخطوة الثانية .

إن إختيار قيمة هـ من المراحل الرئيسية فى الحل . ولإيجاد أفضل قيمة لـ هـ يراعى ما يلى :

لقد سبق أن ذكرنا أن لأى متغير س

س = ا. + ∑ ا.ر (− س.ر) وأن القيد المناظر

$$\text{ك} = \text{ت}\left[\frac{\text{ا.}}{\text{هـ}}\right] + \sum \text{ت}\left[\frac{\text{ا.ر}}{\text{هـ}}\right] (-\text{س}_{\text{ر}})$$

وكما سبق وأوضحنا أن هـ يجب أن تكون كبيرة كبراً كافيا بحيث أن
$\text{ت}\left[\frac{\text{ا.ر}}{\text{هـ}}\right] = -١$. وطبقا لطريقة السمبلكس إذا كان اط هو عامود المفصل بحيث أن :

$$\frac{-١}{\text{ت}\left[\frac{\text{اط}}{\text{هـ}}\right]} \text{اط} = \underset{\text{ر}}{\text{أكبر}} \frac{-١}{\text{ت}\left[\frac{\text{ا.ر}}{\text{هـ}}\right]} \text{ا.ر} \qquad (٢٦)$$

حيث ا.ر < صفر

ولما كانت $\text{ت}\left[\frac{\text{اط}}{\text{هـ}}\right] = -١$

فإن : $\text{ت}\left[\frac{\text{ا.ر}}{\text{هـ}}\right] = (-١ ، -٢ ، \ldots) =$ عدد صحيح

سالب = ت.ر

وبذلك فإن :

$$\frac{\text{اط}}{١} < \frac{\text{ا.ر}}{\text{ت.ر}} < \frac{\text{ا.ر}}{١} \qquad (٢٧)$$

ونخلص مما سبق أن طريقة إختيار هـ تتم على النحو التالى :

إذا كانت (ر) مدلول الصف المولد للقاطع ، اط هو العامود الذى له أقل مدلول الأعمدة التى بها $ا_{ر}$ < صفر فإن لأى قيمة $ا_{ر}$ < صفر نكون $ت_{ر}$ أكبر عدد صحيح يحقق $ا_{ط} < \frac{ا_{ر}}{ت_{ر}}$ فإذا كانت :

$$\frac{-ا_{ر}}{هـ_{ر}} = ت_{ر} \quad \text{أى } هـ_{ر} = -\frac{ا_{ر}}{ت_{ر}}$$ وتكون هـ هى أكبر (هـ : ر)

$$\therefore هـ = \text{أكبر} \left(\frac{-ا_{ر}}{ف_{ر}} \right) \qquad (٢٨)$$

وأحد الخصائص الهامة لمسألة البرمجة العددية الكاملة أن الطريقة لا تعتمد على شرطنا السابق ذكره فى طريقة الكسور أن تكون قيم المعاملات $ا_{ر}$ أعداد صحيحة فمثلا فى المسألة :

تعظيم :

$$\left.\begin{array}{l} س_{.} = ا_{..} - مجـ_{ر} س_{ر} \\ \text{مستوفيا} \\ س_{ن+١} = ا_{و} - مجـ ا_{ور} س_{ر} \geqslant \text{صفر} \\ س_{ر} \text{ أعداد صحيحة} \end{array}\right\} \qquad (٢٩)$$

حيث أن معاملات المسألة (٢٩) لها ا ، حـ ر أعداد صحيحة بينما $ا_{و}$ ، $ا_{ور}$ أرقام حقيقية فإن جدول الحل الإبتدائى للمسأله (٢٨) يوضحه جدول (٨)

	١	$-س_1$	$-س_2$	....	$-س_ن$
$س_0$	$أ_{0 0}$	$ح_1$	$ح_2$		$ح_ن$
$س_1$	٠	−١	٠		٠
$س_2$	٠		−١		
—					
—					
—					
—					
$س_ن$	٠				−١
$س_{ن+1}$	$أ_{1 0}$				
—					
—			$أو_ر$		
—					
—					
$س_{ن+م}$	$أ_{م 0}$				

جدول الحل الابتدائي لمسألة البرمجة العددية الكاملة

جدول (٨)

ولأى صف مصدري و فإن :

$$س_و = أو_0 + \sum أو_ر (-س_ر)$$

حيث : $أو_0$ ، $أو_ر$ أعداد حقيقية فإن القاطع المستخدم

$$ك_و = ت \left[\frac{أو_0}{هـ} \right] + \sum_ب \left[\frac{أو_ر}{هـ} \right] (-س_ر)$$

يكون دائماً بمعاملات صحيحة مفصل = − ١ . فضلا عن قيم معاملات $س_1$ ، ... ، $س_ن$ فى الجدول (٨) التى لها معاملات صحيحه . ومعنى هذا أننا باستخدام هذه القواطع نتوصل فى عدد محدود و من المراحل إلى قيم $أو_0$ أعداد صحيحة موجبة وهو الحل الأمثل المطلوب الذى عند تنتهى الحسابات .

وسوف اوضح المفاهيم السابقة بالمثال التالي :

مثال :

عظم :

س. = — ١٠س١ — ١٥س٢ — ٢٥س٣

مستوفيا

٢س١ + ٢س٢ + ٥س٣ ⩾ ١٥

٢س١ + ١١س٢ + ٦س٣ ⩾ ١٢

٣س١ + ٢س٢ + س٣ ⩾ ٣

س١ ، س٢ ، س٣ أعداد صحيحة ⩾ صفر

الخطوة الأولى :

يمثل جدول (٩) جدول الحل الإبتدائي :

	١	-س١	-س٢ ↓	-س٣
س	١	١٠	١٥	٢٥
س١	٠	١-	٠	٠
س٢	٠	٠	١-	٠
س٣	٠	٠	٠	١-
س٤	١٥-	٢-	٢-	٥-
س٥	١٢-	٨-	١١-	٦-
س٦	٣-	٣-	٢-	١-
ل١	٦-	١٠	(١-)	٢-

جدول الحل الابتدائي متضمنا لقيد المتاطع

جدول (٩)

الخطوة الثانية :

في جدول الحل الإبتدائي أول مدلول له قيمة أو ≻ صفر هو عندي = ٤.

وجميع قيم $أ_{٤ر}$ لهذا الصف سالبة . لذلك سوف نستخدم العمود الذى له أقل ر
وهو العامود الأول لتحديد قيم $ت_{٠ر}$:

$ت_١ = ١$ ، من العلاقة (٢٧)

$$\frac{١٠}{١} > \frac{١٥}{ت_٢} \quad ∴ \; ت_٢ = ت\left(\frac{١٥}{١٠}\right) = ١$$

$$\frac{١٠}{١} > \frac{٢٥}{ت_٣} \quad ∴ \; ت_٣ = ت\left(\frac{٢٥}{١٠}\right) = ٢$$

باستخدام العلاقة (٢٨) :

$$ه_١ = -\left(\frac{-٢}{١}\right) ، \; ه_٢ = -\left(\frac{-٢}{١}\right) ، \; ه = -\left(\frac{-٥}{٢}\right)$$

$$ه = أكبر\,(ه_١ ، ه_٢ ، ه_٣) = أكبر\,(٢ ، ٢ ، \tfrac{٥}{٢}) = ٢\tfrac{١}{٢}$$

الخطوة الثالثة :

باستخدام العلاقة (٢٥) يكون القيد القاطع هو :

$$ك'_٤ = ت\left[\frac{أ_{٤٠}}{ه}\right] + ت\left[\frac{أ_{٤١}}{ه}\right](-س_١) + ت\left[\frac{أ_{٤٢}}{ه}\right](-س_٢)$$

$$+ ت\left(\frac{أ_{٤٣}}{ه}\right)(-س_٣) = ت\left[\frac{-١}{٢,٥}\right] + ت\left[\frac{-٢}{٢,٥}\right](-س_١)$$

$$+ ت\left[\frac{-٢}{٢,٥}\right](-س_٢) + ت\left[\frac{-٥}{٢,٥}\right](-س_٣)$$

$$ك'_٤ = -٦ - (-س_١) - (-س_٢) - ٢(-س_٣)$$

وهو القيد الموضح فى الصف السابع من جدول (٩) .

الخطوة الرابعة :

يجرى التعديل باستخدام السمبلكس الثنائية . المتغير الذي يترك الحل هو $ك'_٤$

بينما المتغير الذى يدخل الحل يتحدد منها العلاقة :

$$\text{أكبر}\left[\frac{-٢٥}{-١} \text{ ، } \frac{١٥}{-١} \text{ ، } \frac{٢٥}{-٢}\right] = -١٠$$

والمفصل = − ١ كما بينا سابقا . ويصبح الجدول بعد التعديل هو جدول (١٠) وتكرر العمل إبتداء من الخطوة الثانية :

	١	−س١	−س٢	−س٣	
س٠	−٦٠	١٠	٥	٥	
س١	٦	−١	١	٢	
س٢	٠	٠	−١	٠	
س٣	٠	١	٠	−١	
س٤	−٣	−٢	٠	−١	الصف المولد
س٥	٣٦	−٨	−٣	١٠	
س٦	١٠	−٣	١	٥	
ن٤	−٣	٢٠−	صفر	(−١)	القيد القاطع

جدول (١)

وبإختيار و = ٤ لأن أ٤٠ < صفر يكون الصف المناظر هو الصف المولد

$$ت_٣ = ١ \;\therefore\; \frac{٥}{١} < \frac{٥}{ت_٢} < \frac{١٠}{ت_١}$$

$$\therefore ت_٢ = ١ \text{ ، } ت_١ = ٢$$

$$هـ_١ = -\left(\frac{-٢}{٢}\right) \text{ ، } هـ_٢ = -\left(\frac{-١}{١}\right)$$

$$\therefore هـ = \text{أدنى}\,(١ \text{ ، } ١) = ١$$

$$ل_٤^٢ = ت\left(\frac{-٣}{هـ}\right) + ت\left(\frac{-٢}{هـ}\right)(-س_١) + ت\left(\frac{-١}{هـ}\right)(-س_٣)$$

ك٤² = -٣ -٢ (-ك٤¹) -١ (-س٢)

يضاف القيد السابق فى الجدول (١٠) ويجرى تعديل ثنائى فنحصل على (١١) :

	ا	- ك٤¹	- س٢	- ك٤²
س.	-٧٥	-	٥	٥
س١	٠	-٥	١	٢
س٢	٠	٠	-١	٠
س٣	٣	٢	٠	-١
س٤	٠	٠	٠	-١
س٥	٦	-٢٨	-٢	١٠
س٦	٠	-١٢	١	٥

جدول (١١)

ولما كانت جميع قيم ا. قيم عددية $>$ صفر فالحل فى جدول (١١) حل أمثل يحقق :

ع = س. = -٧٥ عند س١ = ٠ ، س٢ = ٠ ، س٣ = ٣

(٩ ـ ٢ ـ ٣) البرمجة العددية المختلطة : Mixe DInteger Programming

فى بعض التطبيقات تقيد بعض المتغيرات بقيد العددية بينما لا تقيد باقى المتغيرات ويسمح لهـا بقيم حقيقية والطريقة التى سوف نشرحها استحدثها جوموري كامتداد لطريقة الكسور السابق ذكرها وتتخذ نفس الخطوات .

١ ـ نبدأ بجدول أمثل للبرمجة الخطية

٢ ـ نختار صف ليكون صف مولد أو صف مصدرى

٣ ـ من هذا الصف نكون أو نستحدث قيد إضافى فى نهاية الجدول يكون هو الصف المفصلى .

٤ ـ نستخدم طريقة السمبلكس الثنائية ونكرر العمل إبتداءاً من الخطوة (٢) .

والفرق الوحيد هو فى صياغة القيد القاطع .

المسألة موضع الدراسة هى :

لنظام :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{س}_{\cdot} = \text{ا}_{\cdot\cdot} - \text{ا}_{\cdot,1}\,\text{س}_{1} - \text{ا}_{\cdot,2}\,\text{س}_{2} - \cdots - \text{ا}_{\cdot\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} \quad \text{مستوفيا} \\
\text{س}_{\text{ن}+1} = \text{ا}_{\text{ن}+1,\cdot} - \text{ا}_{\text{ن}+1,1}\,\text{س}_{1} - \text{ا}_{\text{ن}+1,2}\,\text{س}_{2} - \text{ا}_{\text{ن}+1,\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{س}_{\text{ن}+\text{م}} = \text{ا}_{\text{ن}+\text{م},\cdot} - \text{ا}_{\text{ن}+\text{م},1}\,\text{س}_{1} - \text{ا}_{\text{ن}+\text{م},2}\,\text{س}_{2} - \text{ا}_{\text{ن}+\text{م},\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} \\
\text{س}_{\text{ر}} \geqslant \text{صفر} \qquad \text{ر} = 1, \ldots, \text{ن} + \text{ب}
\end{array}
\right. \quad (20)
$$

بعض قيم $\text{س}_{\text{ر}}$ مقيد بالعددية

سوف نحل هذه المسألة على أنها مسألة برمجة خطية عادية باستخدام السمبلكس الثنائية . فإذا كان فى الجدول :

$$\text{ا}_{\cdot\text{ر}} > \text{صفر} \qquad \text{ر} = 1 \, ، \cdots ، \text{ن} ،$$

$$\text{ا}_{\text{و}\cdot} > \text{صفر} \qquad \text{و} = 1 \, ، \cdots ، \text{م}+\text{ن}$$

وجميع المتغيرات المقيدة بالعددية تتوفر فيها هذه الصفة . فالحل أمثل وعلى أى أنه هو الحل الأمثل المطلوب وسوف نفترض أن $\text{ا}_{\text{و}\cdot} >$ صفر ولا تتوفر له صفة العددية المطلوبة للمتغير $\text{س}_{\text{و}}$. فإذا كتبنا هذا المتغير على الصورة :

$$\text{س}_{\text{و}} = \text{ا}_{\text{و}\cdot} + \sum \text{ا}_{\text{و}\text{ر}} \left(-\text{س}_{\text{ر}} \right) \qquad (21)$$

حيث $\text{س}_{\text{و}}$ مقيد بالعددية بينما $\text{ا}_{\text{و}\cdot}$ رقم غير صحيح :

$$\text{ا}_{\text{و}\cdot} = \text{ت}_{\text{و}\cdot} - \text{ف}_{\text{و}\cdot} \qquad (22)$$

لذلك فإن أى حل يحقق (٣١) وبالتعويض من (٣٢) فإن :

$$\text{مجـ}\ \text{ا}_{\text{و ر}} \left(- \text{س}_{\text{ر}} \right) \text{ف}_{\text{و}} \qquad (٣٣)$$

والطرف الأيمن من المعادلة (٣٣) إما سالب أو موجب .

فإذا كان موجب فهو على الصورة : ف. ، ١ + ف. ، ٢ + ف. ، ... وهكذا . ويكون لدينا :

$$\underset{\text{ر}^{+}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} \leqslant \underset{\text{ر}^{-}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} + \underset{\text{ر}^{-}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} \leqslant \text{ف}_{\text{و}} \qquad (٣٤)$$

حيث الرمز ر+ يدل على مجموعة المعاملات ا و ر > صفر ، الرمز ر− يدل على مجموعة المعاملات او ر < صفر فإذا كان الأيسر سالبا فهو على الصورة

− ١ + ف. ، − ٢ف. ، ... وهكذا ويكون لدينا :

$$\underset{\text{ر}^{-}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} > \underset{\text{ر}^{+}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} + \underset{\text{ر}^{-}}{\text{مجـ}}\ \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} > -1 + \text{ف}_{\text{و}} \qquad (٣٥)$$

وبضرب الطرفين فى المعادله (٣٥) فى المعامل $\dfrac{\text{ف}_{\text{و}}}{-1 + \text{ف}_{\text{و}}}$ يصبح لدينا :

$$\underset{\text{ر}^{-}}{\text{مجـ}} \left(\frac{\text{ف}_{\text{و}}}{-1 + \text{ف}_{\text{و}}} \right) \text{ا}_{\text{و ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} \leqslant \text{ف}_{\text{و}} \qquad (٣٦)$$

والذى بالتالى يحقق :

$$\sum_{ر^{+}} أ'_{و ر} \, س_{ر} + \sum_{ر^{-}} أ_{و ر} \, س_{ر} \geqslant ف_{و} \qquad (٢٧)$$

المتباينة (٢٧) يجب أن تحقق لكل حل عددى . وقد استخدمنا فى استحداث القيد (٣٧) الحقيقة الرئيسية وهى أن $س_{و}$ فى الجانب الأيمن من المعادلة (٣١) عددية بينما $س_{ر}$ فى الجانب الأيسر غير سالبة .

وفى حالة ما إذا كانت $س_{ر}$ غير مقيدة بالعددية فالقيد (٣٧) مازال يمثل متباينة يتحتم إستيفاؤها .

ويمكن جعل المتباينة (٣٧) معادلة بإضافة متغير عاطل $ك_{ل}$ على الصورة :

$$ك_{ل} = ف_{و} - \sum_{ر^{+}} أ_{و ر} \, س_{ر} + \sum_{ر^{-}} \left(\frac{ف_{و}}{ف_{و} - ١} \right) أ_{و ر} \, س_{ر} \qquad (٣٨)$$

القيد (٣٨) هو القاطع الذى يضاف فى نهاية الجدول والذى يمثل الصف المفصلى فى التعديل بالسمبلكس الثنائية فى الخطوة التالية :

فإذا كانت قيم $س_{ر}$ فى الطرف الأيمن مقيده بشرط العددية فيمكننا تحسين القيد لنضمن وجود التباين (متباينة قوية) ولتحقق ذلك إذا كانت معاملات $أ_{و ر}$ لقيم $(ر^{+})$ ، $\left(\frac{ف_{و}}{ف_{و} - ١} \right)$ $أ_{و ر}$ لقيم $(ر^{-})$ أصغر ما يمكن

وحيث أننا استنتجنا هذا القيد من المعادلة (٢١) . فإننا بالرجوع إلى هذه المعادلة ولأى مدلول $ر = ل$ فإنه لأى قيمة $أ_{و ل}$ $س_{ل}$ والتى تقيد فيها $س_{ل}$ شرط العددية فإن زيادة $أ_{و ل}$ بأى عدد صحيح لا يؤثر ذلك على صحة المعادلة

(٣١) : ولكل قيم $ا_{ول}$ موجبة أى التى لها ل+ فإن أصغر معامل يمكن الحصول عليه هو $ف_{ول}$.

وإما لقيم $ا_{ول}$ السالبة فإنه بوضع $ا_{ول}$ بأى عدد يوضح $ا_{ول} = ف_{ول} - ١$ نحصل على أقل مقدار $\left(\frac{ف_{ول}}{-١+ف_{ول}}\right) ا_{ول}$

وبالتالى فإنه من العلاقة (٣٤) نخلص أنه علينا زيادة $ا_{ول}$ بمقدار صحيح لتحقق أقل قيمة المعامل فى (٢٧) . أى أن :

$$أقل [ف_{ول} ، \left(\frac{ف_{و.}}{١-ف_{و.}}\right) (١ - ف_{ول})]$$

لاحظ أن :

$$\left.\begin{array}{l} ف_{ول} < \left(\frac{ف_{و.}}{١-ف_{و.}}\right) (١ - ف_{ول}) \\ عندما \quad ف_{ول} < ف_{و.} \end{array}\right\} \qquad (٣٩)$$

،

$$\left.\begin{array}{l} ف_{ول} > \left(\frac{ف_{و.}}{١-ف_{و.}}\right) (١ - ف_{ول}) \\ عندما \quad ف_{ول} > ف_{و.} \end{array}\right\} \qquad (٤٠)$$

وبذلك فإن المعادلة (٣١) تؤدى أخيراً إلى القيد المطلوب للقاطع على الصورة التالية :

$$ل_{و_ر} = - ف_{و_ر} - ر ع ف^{°}_{و_ر} (- س_{و_ر}) \quad (٤١)$$

حيث :

$$ف^{°}_{و_ر} = \begin{cases} ا_{و_ر} & \text{عندما } ا_{و_ر} \geqslant \text{صفر ، } س_{و_ر} \text{ غير عددية} \\ \left(\frac{ف_{و_ر}}{ف_{و_ر} - ١}\right) ا_{و_ر} & \text{عندما } ا_{و_ر} < \text{صفر ، } س_{و_ر} \text{ غير عددية} \\ ف_{و_ر} & \text{عندما } ا_{و_ر} \geqslant \text{صفر ، } س_{و_ر} \text{ عددية} \\ \left(\frac{ف_{و_ر}}{ف_{و_ر} - ١}\right)(١ - ف_{و_ر}) & \text{عندما } ا_{و_ر} < \text{صفر ، } س_{و_ر} \text{ عددية} \end{cases} \quad (٤٢)$$

ويهمنا الآن أن نوضح الخطوات السابقة بمثال :

المطلوب تعظيم :

$$ع = ٢٥ س_١ + ٥ س_٢ + س_٣$$

مستوفيا

$$٥ س_١ + س_٢ + س_٣ \leqslant ٧٥$$

$$س_١ + ٣ س_٢ \leqslant ٥$$

$$س_١ ، س_٣ \geqslant \text{صفر}$$

$$س_٢ ، س_٢ ، س_٣ \text{ أعداد صحيحة}$$

المسألة السابقة يمكن تحويلها للصورة المعيارية للحل بالبرمجة العددية كما يلي :

التنظيم :

$$س_{٠} = ٢٥ر\,س_{١} + ٥ر\,س_{٢} + س_{٣}$$

$$س_{١} = -\,(-\,س_{١})$$

$$س_{٢} = -\,(-\,س_{٢})$$

$$س_{٣} = -\,(-\,س_{٣})$$

$$س_{٤} = ١٫٧٥ - ٥ر\,س_{١} - س_{٢} - س_{٣}$$

$$س_{٥} = ١٫٥ - س_{١} - ٣\,س_{٢}$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \geqslant ٠$$

$س_{٢}$ ، $س_{٣}$ أعداد صحيحة

ويمثل الجدول (١٢) جدول الحل الإبتدائى ، جدول (١٣) جدول الحل الأمثل بدون شرط العددية لأى متغير :

	١	$-س_{١}$	$-س_{٢}$	$-س_{٣}$ ↓
$س_{٠}$	صفر	-٢٥ر	-٥ر	-١
$س_{١}$	صفر	-١	صفر	صفر
$س_{٢}$	صفر	صفر	-١	صفر
$س_{٣}$	صفر	صفر	صفر	-١
← $س_{٤}$	١,٧٥	٥ر	١	(١)
$س_{٥}$	١,٥	١	٢ر	صفر

جدول (١٢) الحل الابتدائى

	١	↓ $-$س١	$-$س٢	$-$س٤
ص	١,٣	٢٥ر	٥ر	١
س١	٠	١-	٠	٠
س٢	٠	٠	١-	٠
س٣	١,٧٥	٥ر	١	١
س٤	٠	٠	٠	١-
س٥	١,٥	١	٣ر	٠
ك٢	$-\frac{٣}{٤}$	$(-\frac{١}{٢})$	٠	٠

جدول (١٣) جدول الحل الأمثل الغير محدى والقيد القاطع

فى جدول (١٣) المتغير س٣ المشروط بالعددية بأخذ القيمة ١,٧٥ . وجميع قيم $ا_{ر٠}$ فى الجدول موجبة لذلك فإن : $ف_{ر٠}^{*} = ف_{ر٠}$

ونظراً لأن :

$$س_٣ = \frac{٧}{٤} + \frac{١}{٢}(-س_١) + ١(-س_٢) + ١(-س_٤)$$

$$\text{فإن : } ف_{٣٠} = \frac{-٣}{٤} \text{ ، } ف_{٣١} = -\frac{١}{٢} \text{ ، } ف_{٣٢} = ف_{٣٤} = \text{صفر}$$

وبذلك فإن معادلة القيد القاطع هى :

$$ك_٢' = \frac{-٣}{٤} - \frac{١}{٢}(-س_١)$$

وهو القيد الوارد فى نهاية الجدول (١٣) . بإجراء تعديل سمبلكس ثنائية على هذا الجدول نحصل على الجدول (١٤) التالى :

شكل (١١١) . المدرك د١ ، د٢

	١	ـ ع٣	ـ س٤	ـ س٣
س.	$\frac{١١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١
س١	١٠	٢	٠	٠
ص٢	٠	٠	−١	٠
س٣	١	−١	١	١
س٤	٠	٠	٠	−١
س٥	٠	٠	$-\frac{٣}{١}$	٠

جدول (١٤)

جدول الحل الأمثل

والحل الأمثل يحقق ع = س. = $\frac{١١}{٨}$ ، س١ = ٥و١ ، س٢ = ٠ ،

ص٢ = ١

(٦ — ٣) البرمجة العددية (صفر — ١)

فى كثير التطبيقات تكون المتغيرات القرارية تتخذ قيما أما صفر أو واحد . فمثلا فى مسائل الاستثمار المتعلقة لتحديد أفضل مجموعة للمشروعات يكون متخذ القرار أما إختيار المشروع (وبذلك يأخذ المتغير قيمة تساوى واحد) أو عدم إختياره (وبذلك يأخـــذ المتغير قيمة تساوى صفر) . وينطبق نفس الشىء فى مسائل تحديد المواقع أو تخصيص الموارد فى إنجاز المشروعات أو تقليل المواد (العادم) فى تجهيز الخامات .

وفى كل هذه الأحـــوال تكون مسألة البرمجة العددية موضع الدراسة على الصورة :

تدنيه :

$$\text{(٤٣)} \begin{cases} س_. = أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + \cdots + أ_ن س_ن \\ \text{مستوفيا} \\ س_{ن+ر} = أ_ر + و_ر + \cdots + أ_{ور} س_ر \\ ر = ١ ، \cdots ، ن \\ م = ١ ، \cdots ، م \\ س_١ ، س_٢ ، \cdots ، س_ن ، س_{ن+١} ، \cdots س_{ن+م} \geqslant \text{صفر} \\ س_١ ، س_٢ ، \cdots ، س_ن = \text{صفر أو واحد} \end{cases}$$

ويمكن حل هذه المسألة كمسألة برمجة عددية كاملة باستخدام الطريقة المشروحة سابقا :

ولكن نظراً لأن المتغيرات أخذ قيما صفر أو واحد فقط فإن هناك طرق أبسط للحل أهمها أسلوب السرد الضمنى الذى يرجع إلى بالاس[٥] .

(٦ - ٣ - ١) السرد الضمنى (الجزئى) Implicit Enumeration

أحد الطرق التى تطرأ فى أذهاننا هى إختيار كل التوقعات الممكنة لحل مسألة البرمجة العددية (صفر — ١) . وهذه الطريقة يمكن أن نسميها بالسرد الصريح (الكلى) Explicit Enumeration . ويتطلب ذلك إختبار $٢^ن$ من التوفيقات الممكنة ويلاحظ مقدار الجهد الحسابى عندما تكون ن كبيرة (ذ ت

(٥) Balas, E. « An additive Algorithm for Solving Programs With Zero one Variables » Jr. ORSA vol 13 № 4 (1965) PP. 517 - 546

قيم عملية) حيث عندما ن > ٢٠ يكون المحاولات أكبر من $١٠^{٦}$. ومن ثم فمن الضروري إستحداث طريقة تقوم باختيار جزء صغير من كل هذه التوفيقات الممكنة للتوصل للحل الأمثل وهو ما يحدث في أسلوب السرد الضمني أو الجزئي .

وفي كل طرق السرد الضمني يبدأ الحل بجعل المتغيرات $س_ر$ = صفر وهذا يحقق في الواقع أدنى قيمة لـ $س_0$. لكنه يحذف بعض أو كل القيود . ثم يبدأ بجعل بعض المتغيرات تأخذ القيمة ١ للحصول على حل عملي . ويعتبر هذا الحل أفضل حل عملي حتى الآن - ولكن ليس بالضرورة أمثل - ثم تبدأ الطريقة في إختيار التوفيقات التي يمكن أن تحسن الحل العملي للوصول إلى حل أمثل .

ولكي نهيء ذهن القارىء إلى تفصيلات خطوات أسلوب السرد الضمني سوف نبدأ بحل المثال البسيط التالي :

المطلوب تدنية :

$$س_0 = ٤س_1 + ٣س_2 + ٢س_3$$

مستوفيا

$$٢س_1 - ٥س_2 + ٣س_3 \leq ٤$$

$$٤س_1 + س_2 + ٣س_3 \geq ٣$$

$$س_2 + س_3 \geq ١$$

$س_ر$ = واحد أو صفر ، ر = ١ ، ٢ ، ٣

تدنيسة :

س٠ = ٤س١ + ٣س٢ + ٢س٣

س٤ = ٤ − ٢س١ + ٥س٢ − ٣س٣ ≥ صفر

س٥ = − ٣ + ٤س١ + س٢ + ٢س٣ ≥ صفر

س٦ = − ١ + س٢ + س٣ ≥ صفر

س١ ، س٢ ، س٣ = ١ أو صفر

١ — نبدأ السرد بوضع س١ = س٢ = س٣ = صفر ، س٠ = صفر وبالتعويض فى القيود : س٤ > صفر ، س٥ < صفر ، س٦ < صفر ، أى أن كلا من القيد الثانى والثالث لم يتحقق . تسمى المتغيرات هنا حرة بمعنى أنها غير معينة القيمة حتى الآن ويظهر ذلك فى المفصل (١) شكل (١) .

٢ — لإختيار المتغير من المجموعة حـ (١ ، ٢ ، ٣) التى تحتوى مدلولات المتغيرات ، والذى يأخذ القيمة واحد فى المرحلة القادمة هناك عديد من الطرق منها مثلا أن نختار المتغير الذى له أقل بعد عن منطقة الإمكانيات . وذلك بإختبار المتغيرات الثلاثة س١ ، س٢ ، س٣ .

س١ = ١ البعد عن منطقة الامكانيات

س٤ = ٣ − ٢ = ٢	صفر
س٥ = − ٢ + ٤ = ١	صفر
س٦ = − ١	١
المجموع	١

$س_{٢} = ١$		البعد عن منطقة الإمكانيات
$س_{٤} =$	− ٤ ٥ = ٩	صفر
$س_{٥} =$	− ٣ + ١ = − ٢	٢
$س_{٤} =$	− ١ + ١ = صفر	صفر
	المجموع	٢

$س_{٣} = ١$		البعد عن منطقة الإمكانيات
$س_{٤} =$	٤ − ٣ = ١	صفر
$س_{٥} =$	− ٣ + ٣ = صفر	صفر
$س_{٢} =$	− ١ + ١ = صفر	صفر
	المجموع	صفر

نختار $س_{٣} = ١$

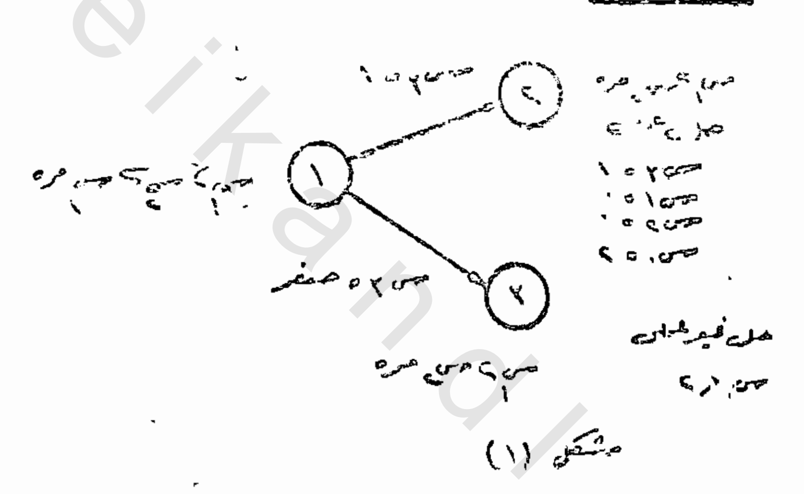
٣ — الحل الجزئى عند المفصل (٢) هى $س_{٣} = ١$ والحل الكلى هو $س_{٣} = ١$ ، $س_{٢} =$ صفر ، $س_{١} =$ صفر . لاحظ أن هذا الحل ممكن (عملى) وأن $س_{ب} = ٢$ ، وهى أفضل قيمة حتى الآن .

٤ — نظراً لأن معاملات $س_{٢}$ ، $س_{١}$ فى دالة الهدف موجبة فإن وجود أى قيمة غير الصفر لهذه المتغيرات سوف يؤدى إلى زيادة غير مرغوبة فى $س_{ب}$. لذلك ليس من الضرورى إختيار قيم الحل هذه ويعتبر أنه تم (مترديا ضمنيا) .

٥ — نرجع إلى المفصل (١) ونحدد قيمة $س_{٣} =$ صفر ، $س_{٢} = س_{١} =$ صفر

متغيرات حرة (غير محددة بعد) فى هذه الحالة يكون الحل غير عملى ـ وللإختيار ما إذا كان يمكننا أن نتفرع من المفصل (٣) ـ نلاحظ أن معاملات س١ ، س٣ فى دالة الهدف أكبر من س٢ . لذلك فإن إختيار أى قيم غير الصفر لهذه المتغيرات لجعل الحل ممكن لن يؤدى إلى الحصول على قيمة س > ٢. لذلك يكون الحل عند المفصل (٢) حل أمثل .

وهو المطلوب :



شكل (١)

والآن وبعد المناقشة السابقة يمكننا وضع خطوات أكثر تحديداً لطريقة السرد الضمنى :

سوف نستخدم التعريفات التاليه فى الخطوات .

ح = مجموعة المدلولات للمتغيرات التى لم يتحدد بعد القيمة صفر أو واحد .

غ ح = مجموعة المدلولات للمتغيرات التى تم تحديد قيمتها بصفر أو واحد .
إذا كان عنصر فى غ ح سالب فالمتغير المناظر يكون صفر وإلا فهو يساوى الواحد .

$س_{.}^{°}$ = أقل قيمة لدالة الهدف المناظرة لأفضل حل عملى فى مرحلة الحل .

ق = مجموعة القيود الغير مستوفاه .

ح = مجموعة المتغيرات ح التى لها :

(أ) معامل لدالة الهدف أقل من الحد (ى) حيث :

$$ى = س_{.}^{°} - \sum_{ر(غ ح)} ا_{.ر} - س_{ر}$$

(ب) معامل موجب فى بعض القيرد ق

$\sum_{ر(غ ح)}$ = حاصل الجمع للمتغيرات الغير حرة .

__الخطوة (١):__

ح = (١ ، ٢ ، ... ، ن)

غ ح = (صفر)

$س_{.}^{°}$ = ك = عدد كبير

__الخطوة (٢):__

أحسب :

$$س_{.} = \sum_{ر(غ ح)} ا_{.ر} س_{ر}$$

__الخطوة (٣):__

اختبر جميع القيود $س_{ن+ر}$ = ١ ، ... ، م بإستخدام غير المتغيرات غ ح المحددة أو قيم المتغيرات التى مساوية ح توضع للصفر .

إذا كانت جميع القيود مستوفاة فإن الحل السابق يكون عملى . إذا لم يتحقق ذلك فإن :

ق تكون مجموعة القيود الغير مستوفاه .

الخطوة (٤). غ

إذا كانت ق خالية (لا توجد قيود غير مستوفاة) إنتقل إلى الخطوة (١٢) وإلا فانتقل إلى الخطوة (٥) .

الخطوة (٥):

ضع : $ى = س_{.}^{\circ} - س_{.}$

الخطوة (٦):

إختيار المتغيرات ح التى يمكنها جعل القيود مستوفاة . إذا كانت ح مجموعة المتغيرات فى ح التى لها :

(أ) معاملات موجبة فى القيود ق

(ب) معاملات دالة هدف أقل من ى

القيد الغير مستوف يمكن جعله أقرب إلى الاستيفاء بجعل المتغير الذى له معاملات موجبة مساويا للواحد وبنفس الطريقة المتغير س(ل) فى ح الذى له :

$$\sum_{ر(غ ح)} أ_{.ر}\, س_{.ر} + أ_{.ل}\, س_{ل} \geqslant س_{.}^{\circ}$$

لا يجب اعتباره فى ح نظراً لأن الحل العملى المناظر لـ $س_{.}^{\circ}$ أفضل .

الخطوة (٧) :

إذا كان ح خالية إنتقل إلى الخطوة (١١) وإلا فإنتقل إلى الخطوة (٨)

الخطوة (٨) : لكل قيد فى (ق)

إعط قيمة = واحد للمتغيرات فى ح التى لها معاملات موجبة فى القيد

إعط قيمة المتغيرات غ ح مساوية للقيم المحددة لها .

الخطوة (٩) :

إذا ما كان أى قيد غير مستوف إنتقل إلى الخطوة (١١) وإلا فأنتقل الى الخطوة (١٠) .

الخطوة (١٠) :

أزل من ح وأضف الى غ ح متغيرات ح التى تدنى البعد عن منطقة الإمكانيات للقيود ويتم ذلك كما يلى :

(١٠ — أ) لأى متغير س (ل) فى ح قيم القيود س(ن + و) ر = ١ ، ... ، م بإستخدام المتغيرات غ ح طبقا للقيم المحددة لها ، س(ل) = صفر . وباقى المتغيرات ح بقيم صفر

(١٠ ـ ب) عين حاصل جمع اقيم السالبة وهى الفرق بين القيمة المحددة للقيد والقيمة الناتجة . أرمز لقيمة المطلقة لحاصل الجمع بالرمز ف .

(١٠ ـ حـ) إزل من من ح وأضف إلى غ ح المتغير الذى له أقل ف إرجع إلى الخطوة (٢)

الخطوة (١١) : إذا كانت غ ح خالية إنتقل إلى الخطوة (٢١) . وإلا فلا يوجد حل على مكمل للحل الجزئى الممثل لـ غ ح أقل من القيمة الحالية س. ومن ثم أنتقل إلى الخطوة (١٦) .

الخطوة (١٢) المتغيرات فى غ ح بالقيم المحددة لها مضافاً إليها المتغيرات ح لقيم مساوية للصفر تمثل الحل الكامل . إنتقل إلى الخطوة (١٣) .

الخطوة (١٣) : إذا كانت س. > س.° إنتقل إلى الخطوة (١٤) وإلا فانتقل إلى الخطوة (١٥) .

الخطوة (١٤) : ضع س.° = س. أحتفظ بالحل الممكن وإنتقل إلى الخطوة (١٥) .

الخطوة (١٥) : الإختبار الخفى : إذا كانت غ ح خالية . فإن الحل الممكن س(ر) = صفر ، ر = ١ ، ... ، ن أمثل .

لذلك إنتقل إلى الخطوة (٢٠) . وإلا فإنتقل إلى الخطوة (١٦) .

الخطوة (١٦) : إذا كان العنصر الأخير فى غ ح غير سالب إنتقل إلى الخطوة (١٨) وإلا فأنتقل إلى الخطوة (١٧) . آخر عنصر جهة اليسار هو آخر عنصر فى غ ح .

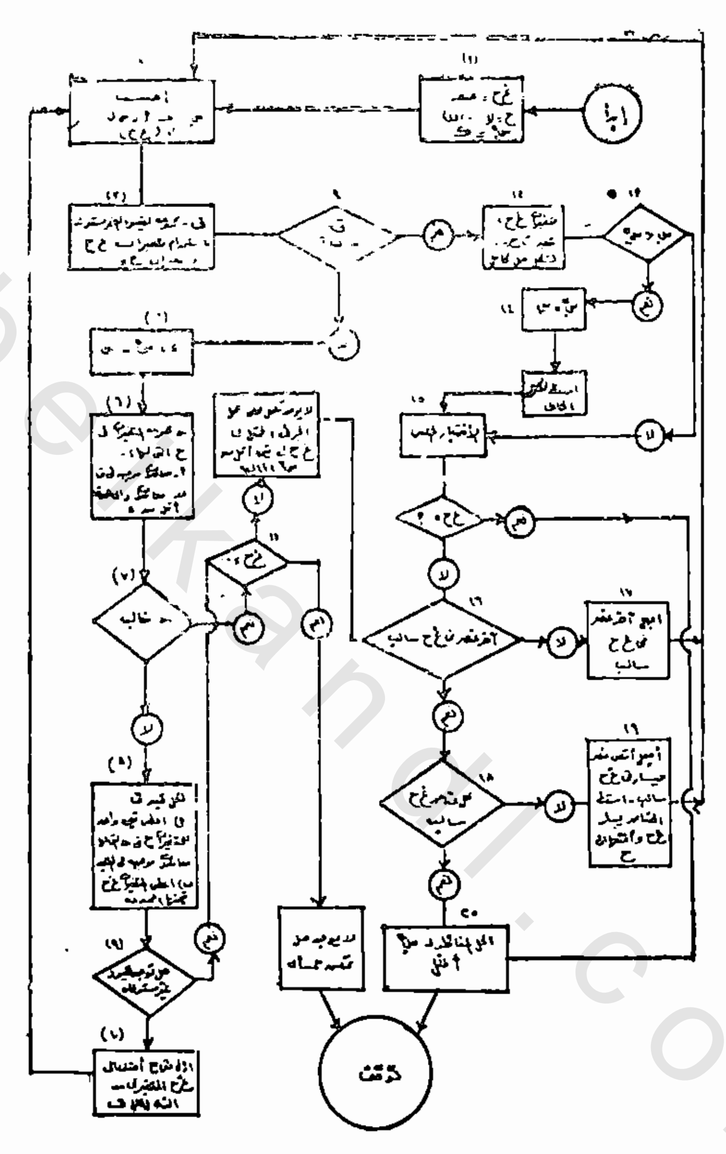
الخطوة (١٧) : إجعل آخر عنصر فى غ ح سالب وإنتقل إلى الخطوة (٢) . المتغير المناظر لآخر عنصر تم تحديد قيمة واحدة له . حدد الآن قيمة صفر لهذا المتغير .

الخطوة (١٨) : إذا كانت جميع العناصر فى غ ح سالبة – فإن الحل امثل – إنتقل إلى الخطوة (٢٠) وإلا تنقل إلى الخطوة (١٥) .

الخطوة (١٩) أجمل أقصى عنصر موجب جهة اليسار فى ن ح سالب، وإضف هذا العنصر إلى ح. إنتقل إلى الخطوة (٢) .

الخطوة (٢٠) الحل المناظر س. ° أمثل . إذا كانت س. ° = ك . لا يوجد حل عملى للمسألة .

والخطوات ممثلة فى خريطة التدفق شكل (٢) .



الشكل (٤) تخطيط التدفق لخطوات إسناد الحقوق

أن الخطوات السابقة مصممة أيضا للاستخدام على الحاسبات الآلية . لذلك فإن الخطوات (١٦) - (١٩) يمكن الاستغناء عنها فى الحل اليدوى :

ولتوضيح المفاهيم السابقة سوف نورد مثالا نستخدم فيها الخطوات المذكورة فى طريقة السرد الضمنى .

مثال :

من المسائل المعيارية فى البرمجة العددية (صفر ١) المسألة المعروفة بأسم (زكيبة الرحالة) Knapsaek .proplem والمسألة لها إمتدادات عديدة وخاصة فى رحلات الفضاء . وتلخص كما يلى :

يقوم رحالة بإختيار مجموعة من المهمات التى يحتاجها فى رحلته ولكنه لا يستطيع أن يحمل أكثر من حد أقصى من الوزن الذى يحدده لزكيبة • ولذلك فهو يحدد قيم للتفضيل بين هذه المهمات التى عددها ن .

إفترض أن الرحالة حدد قيمة الصنف ر بالكمية حـ ر وأن وزن هذا الصنف ا ر . وأن الحمل الأقصى المحدد ب . فالمسألة هى :

تعظيم :

$$ع = \sum_{ر=1}^{ن} حـ_ر \, ص_ر$$

مشروطا

$$\sum_{ر=1}^{ن} ا_ر \, ص_ر < ب$$

$$ص_ر = \text{صفر أو واحد}$$

وكمثال سوف نغير المسألة التالية :

تعظيم :

$$ع = ٦٠ص_١ + ٦٠ص_٢ + ٤٠ص_٣ + ٣٠ص_٤ + ٢٠ص_٥ + ١٠ص_٦ + ٢٠ص_٧$$

مستوفيا

$$٣ص_١ + ٤ص_٢ + ٥ص_٣ + ٣ص_٤ + ٤ص_٥ + ٣ص_٦ + ص_٧ \geq ١٢$$

$$ص_١ ، \ldots ، ص_٧ = صفر أو واحد$$

لحل هذه المسألة يجب وضعها على صورة مسألة تدنيه أى :

تدنيه :

$$-ع = -٦٠ص_١ - ٦٠ص_٢ - ٤٠ص_٣ - ٣٠ص_٤ - ٢٠ص_٥ - ١٠ص_٦ - ٢٠ص_٧$$

ولكن يلاحظ أن أسلوب السرد الضمنى السابق مبنى على معاملات موجبة لدالة الهدف لذلك يستخدم التعويض .

$$ص_ر = ١ - ص_ر$$ وبذلك تكون المسألة :

تدنيه :

$$-ع = -٢٤٠ + ٦٠س_١ + ٦٠س_٢ + ٤٠س_٣ + ٢٠س_٤ + ٢٠س_٥ + ١٠س_٦ + ٢٠س_٧$$

والتى تناظر :

تدنيه :

$$\text{س}_0 = 60\,\text{س}_1 + 60\,\text{س}_2 + 40\,\text{س}_3 + 30\,\text{س}_4 + 20\,\text{س}_5 + 10\,\text{س}_6 + 20\,\text{س}_7$$

مستوفيا

$$-3\,\text{س}_1 - 4\,\text{س}_2 - 5\,\text{س}_3 - 3\,\text{س}_4 - 4\,\text{س}_5 - 3\,\text{س}_6 - \text{س}_7 + 23 \geq 12$$

أى :

$$3\,\text{س}_1 + 4\,\text{س}_2 + 5\,\text{س}_3 + 3\,\text{س}_4 + 4\,\text{س}_5 + 3\,\text{س}_6 + \text{س}_7 \leq 11$$

وبذلك نصل إلى الشكل المطلوب للحل بالسرد الضمنى

تدنيه :

$$\text{س}_0 = 60\,\text{س}_1 + 60\,\text{س}_2 + 40\,\text{س}_3 + 30\,\text{س}_4 + 20\,\text{س}_5 + 10\,\text{س}_6 + 30\,\text{س}_7$$

مستوفيا :

$$\text{س}_8 = 11 - 3\,\text{س}_1 + 4\,\text{س}_2 + 5\,\text{س}_3 + 3\,\text{س}_4 + 4\,\text{س}_5 + 3\,\text{س}_6 + \text{س}_7 \geq \text{صفر}$$

خطوات الحل : واستخدام خريطة التدفق فى شكل (٢)

الخطوة (١) ح = [١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧]

غ ح = [صفر]

$\text{س}^*_0 = \infty$

الخطوة (٢) أحسب $س_. = \frac{مح}{م (غ ح)}$ ا.ر س.ر = صفر

الخطوة (٣) أحسب $س_٨$ بوضع المتغيرات فى ح = صفر ، $س_٨$ = — ١١

ق = [$س_٨$]

الخطوة (٤) ق غير خالية .

الخطوة (٥) أحسب ى = ك — $س_.$ = ك

الخطوة (٦) ا ـ معاملات المتغيرات فى داله الهدف كلها أصغر من ك

ب ـ المعاملات المناظرة فى القيود كلها موجبة .

∴ ح = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧]

الخطوة (٧) ح غير خالية .

الخطوة (٨) إختبر القيد $س_٨$ من ناحيه الإمكانية بجعل جميع المتغيرات فى ح تساوى الواحد .

الخطوة (٩) أزل من ح وأضف إلى غ ح المتغير الذى يقابل البعـــد عن منطقـه الإمكانيات .

فى هذه الحالة الذى له أكبر معامل فى القيد أى $س_٣$

∴ غ ح = [٣] ، ح = [١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧]

ارجع للخطوة (٢)

الخطوة (٢) أحسب $س_. = \frac{مح}{م (غ ح)}$ ا.ر س.ر = ٤٠

الخطوه (٣) $س_٨$ = — ١١ + ٥ = — ٦

ق = [$س_٨$]

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ء = ك − س. = ك − ٤٠ = ك

الخطوة (٦) ح = [١ ، ٤ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧]

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ = ١٢ > صفر

الخطوة (٩) أزل ح واضف إلى غ ح المتغير الذى يقلل المسافة من منطقة الإمكانية وفى هذه الحالة المتغير $س_٥$

أدنى ف = | − ١١ + ٥ + ٤ | = | − ٢ | = ٢

غ ح = [٣ ، ٥]

ح = [١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧]

الخطوة (٢) احسب س. = مجـ ا.ر سر (ر ∈ غ ح) = ٤٠ + ٢٠ = ٦٠

الخطوة (٣) $س_٨$ = − ١١ + ٥ + ٤ = − ٢

ق = ($س_٨$)

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) احسب ء = ك − ٦٠ = ك

الخطوة (٦) ح = [١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧]

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ = ١ > صفر

الخطوة (٩) أزل من ح واضف إلى غ ح المتغير الذي يقلل المسافة من منطقة

الإمكانيات :

المتغير	$س_٨$	ف
$س_١$	١	صفر
$س_٢$	٢	صفر
$س_٤$	١	صفر
$س_٦$	١	صفر
$س_٧$	صفر	صفر

نختار المتغير $س_٦$ (يحقق ف = صفر وله أقل معامل في دالة الهدف)

غ ح = [٣ ، ٥ ، ٦]

ح = [١ ، ٢ ، ٤ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_.$ = ٤٠ + ٢٠ + ١٠ = ٧٠

الخطوة (٣) $س_٨$ = – ١١ + ٥ + ٤ + ٣ > صفر

ق = صفر

الخطوة (٤) ق خالية

الخطوة (١٢) الحل المكمل : $س_١$ = ٠ ، $س_٢$ = ٠ ، $س_٣$ = ١ ،

$س_٤$ = ٠ ، $س_٥$ = ١ ، $س_٦$ = ١ ، $س_٧$ = صفر

الخطوة (١٣) $س_.$ > ك

الخطوة (١٤) $س_.^*$ = $س_.$ = ٧٠

الخطوة (١٥) احتفظ بالحل الحالي - أجر خطوات الحل الخلفية

غ ح غير خالية

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى غ ح غير سالب . نجمل آخر عنصر سالب أى :
غ ح = [٢ ، ٥ ، —٦] : هذا يجعل قيمة هذا المتغير صفر

الخطوة (٢) أحسب س. = مجـ (غ ح) ا.ر س.ر = ٤٠ + ٢٠ + ٦٠

الخطوة (٣) س٨ = — ١١ + ٥ + ٤ = ٢٠
ق = (س٨)

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) أحسب ى = ٧٠ — ٦٠ = ١٠

الخطوة (٦) لا يوجد فى ح = [١ ، ٣ ، ٤ ، ٧] عنصر له معامل موجب فى
س٨ وله معامل فى دالة الهدف أقل من ١٠

الخطوة (٧) حـ = (صفر)

الخطوة (١١) غ ح ≠ صفر
لا يوجد مكمل عملى يحتوى على المتغيرات ع ح (٢ ، ٥ ، — ٦)
يعطى أقل قيمة أقل من س.* = ٧٠

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى غ ح سالب

الخطوة (١٧) ليست جميع غ ح سالبة

غ ح = [— ٦]

ح = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) س. = ٠

الخطوة (٣) $س_٨ = - ١٢$

ق = [$س_٨$]

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ء = ٧٠ — ٠

الخطوة (٦) حـ = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧] ∴ نختار $س_١$

الخطوة (٧) = حـ غير خالية

الخطوة (٨) > $س_٨$ صفر

الخطوة (٩) غ ح = (— ٦ ١)

ح = [٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_٠ = ٦٠$

الخطوة (٣) $س_٨ = - ١١ + ٣ = - ٨ <$ صفر

ق = [$س_٨$]

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٦) ء = ٧٠ — ٦٠ = ١٠

الخطوة (٧) حـ = [صفر]

لا يوجد حل عملى يحتوى غ ح (— ٦ ١) يعطى قيمة أقل من $س_٠^° = ٧٠$

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى غ ح غير سالب

الخطوة (١٧) نجعل آخر عنصر سالب

غ ح (– ٦ ، – ١)

ح = [٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_ر$ = ٠

الخطوة (٣) $س_ﻫ$ = – ٢

ق = $س_{(ﻫ)}$

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ء = ٧٠ – صفر

الخطوة (٦) ح = [٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧] نختار $س_٢$

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ > ٠

الخطوة (٩) غ ح = [– ٦ ، – ١ ، ٢]

ح = [٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_ر$ = ٦٠

الخطوة (٣) $س_٨$ = – ١١ + ٤ = – ٧

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٦) ء = ٧٠ – ٦٠ = ١٠

الخطوة (٧) ح = [صفر]

لا يوجد حل على مكمل غ ح [– ٦ ، – ١ ، ٢] يعطي قيمة أقل من س* = ٧٠

الخطوة (١٦) آخر عنصر غير سالب

الخطوة (١٧) نجعل آخر عنصر سالب

غ ح (−٦ ، −١ ، −٢)

ح = [٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_ب$ = ٠

الخطوة (٣) $س_٨$ = − ١١

ق = [$س_٨$]

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ى = ٧٠ − صفر = ٧٠

الخطوة (٦) ح = [٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧] نختار $س_٣$

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ > صفر

الخطوة (٩) غ ح = [− ٦ ، −١ ، ٢ ، ٢]

الخطوة (٢) $س_ب$ = ٤٠

الخطوة (٣) $س_٨$ = − ١١ + ٥ = − ٦

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ى = ٧٠ − ٤٠ = ٣٠

الخطوة (٦) ح = [٤ ، ٥ ، ٧] نختار $س_٤$

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_{٨} > ٠$

الخطوة (٩) غ ح [-٦ ، -١ ، -٢ ، ٣ ، ٤]
⊂ [٥ ، ٧]

الخطوة (٢) $س_{٠} = ٧٠$

الخطوة (٣) $س_{٨} = -١١ + ٥ + ٣ >$ صفر

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ى = ٧٠ − ٧٠ = صفر

الخطوة (٦) ح = [صفر]

الخطوة (٧) ح خالية

لا يوجد حل عملى مكمل يحتوى [-٦ ، -١ ، -٢ ، ٣ ، ٤]

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى ع ح غير سالب

الخطوة (١٧) نجعل آخر عنصر سالب [-٦ ، -١ ، -٢ ، ٣ ، -٤]

الخطوة (٢) $س_{٠} = ٤٠$

الخطوة (٣) $س_{٨} = -١١ + ٥ = -٦$

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ى = ٧٠ − ٤٠ = ٣٠

الخطوة (٦) ح = [٥ ، ٧]

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ = − ١١ + صفر + صفر + ٥ + صفر + ٤ + صفر + ١ > صفر

الخطوة (٩) لا يوجد حل عملى مكمل له [−٦ ، −١ ، −٢ ، ٣ ، −٤]

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى ع ح سالب (نجعل آخر عنصر موجب جهة اليسار سالب ـ ويضم أيسره إلى ح)

ع ح (−٦ ، −١ ، −٢ ، −٣)

خ = [٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٢) س. = ٠

الخطوة (٣) $س_٨$ > صفر

الخطوة (٤) ق غير خالية

الخطوة (٥) ى = ٧٠ − صفر = ٧٠

الخطوة (٦) ح = [٤ ، ٥ ، ٧]

الخطوة (٧) ح غير خالية

الخطوة (٨) $س_٨$ = − ١١ + صفر + صفر + صفر + ٣ + ٤ + ١ < صفر

الخطوة (٩) لا يوجد حل عملى مكمل (−٦ ، −١ ، −٢ ، −٤)

الخطوة (١٦) آخر عنصر فى ع ح سالب

الخطوة (١٨) جميع العناصر فى ع ح سالبة

الخطوة (٢٠) الحل س° هو الحل الأمثل الذى يحقق :

س.° = ٧٠ ، $س_١$ = ٠ ، $س_٢$ = ٠ ، $س_٣$ = ١ ،

$س_٤$ = ٠ ، $س_٥$ = ١ ، $س_٦$ = ١ $س_٧$ = ٠

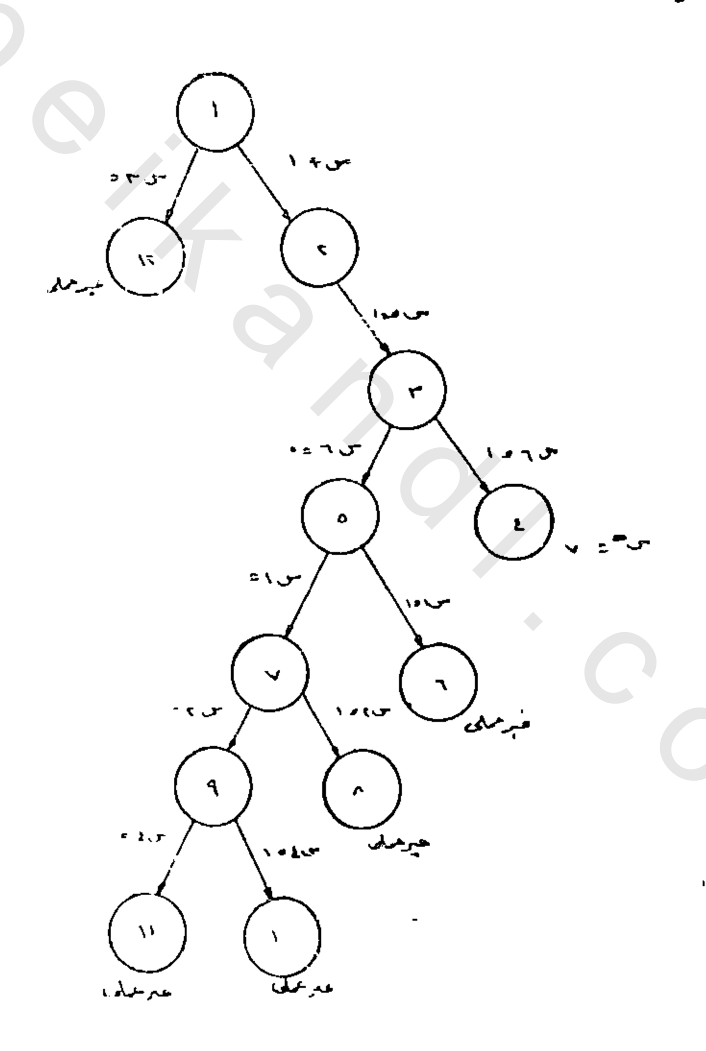
وبالتعويض عن : $ص'_ر = ١ - ص_ر$

$ص_١ = ١$ ، $ص_٢ = ١$ ، $ص_٣ = ٠$ ، $ص_٤ = ١$ ،

$ص_٥ = ١$ ، $ص_٦ = ٠$ ، $ص_٧ = ٠$

$-ع = -٢٤٠ + ٧٠$ ، $ع = ١٧٠$

ويمثل الحل بالخطوات التالية :



(شكل ٣) شجرة السرد الضمني لمسألة تركيبة الرحال

أن كفاءة الطريقة لا تظهر بوضوح فى المثال السابق البسيط ولكن من المهم أن نذكر أن استخدام الحاسب الآلى طبقا لقواعد طريقة السرد الضمنى فى شكل (٢) والمستخدمة فى الحل يعطى نتائج إيجابية للغاية . كما من المهم أن نوضح أن عدد المحاولات المطلوبة فى الحل العادى للمثال السابق هى $٢^٧$ = ١٢٨ محاولة . وأن إضافة القيود فى الواقع يزيد من كفاءة الحل لأنه يقلل بإستمرار من المجموعة ح المستخدمة فى الحل .

وهناك طرق خاصة فى السرد الضمنى للمسائل ذات الطبيعة الخاصة مثل المسألة السابقة تختلف فقط فى كيفية إختيار المتغيرات التى تدخل فى الحل لزيادة كفاءة العملية الحسابية .

(٦ - ٣ - ٢) طرق الفرع والحد (*) Branch and Bound Algorithm

أحد الطرق الهامة فى حل مسائل البرمجة العددية الكلية والمختلطة والبرمجة العددية (صفر ، ١) هى استخدام شجرات بحث بحيث يجزء مجال الحلول العملية إلى مجموعات جزئية أقل فأقل بطريقة تكرارية (الفرع) مع حساب حدود دنيا (فى حالة مسألة التدنية) لقيم دالة الهدف لكل مجموعة جزئية (الحد) . وبعد كل عملية تجزئة تستبعد من الحل المجموعات التى تزيد قيمة دالة الهدف فيها عن

(*) راجع :

1 – Land and Doig « An automatic Method for Solving discret Programming Problem» Econometrica Vol 78,1960,PP497-520

2 – Lawler and wood «Branch and Bound Algorthm- Asurvery» Jr orsa vol 14 1966 pp 699 – 719

8 – Lemke And Spilibrg « Direct Search Algorithm for 0 - 1 Mixed Integer Programming Jr orsa v 15 1967 892 - 91 1967

الحدود الدنيا الموضوعة . وبهذه الطريقة يمكن إستبعاد مجموعات كبيرة من الحل ومن إستمرار تجزئتها أو إختيار قيمها وتستمر العملية حتى تتوصل إلى حل ممكن لا تزيد قيمته عن الحد الأدنى الموضوع .

وتتفاوت كفاءة الطرق المستخدمة على عدد الحلول التى علينا أن نختبرها قبل التوصل إلى الحل الأمثل . حيث تشترك كل الطرق فى المبدأ العام للفرع والحد وتختلف فى طريقة الفرع وتحديد الحد .

وفى أى نقطة فى طريقة الفرع والحد حيث يجب إتخاذ قرار للفرع فإن أى مجموعة جزئية لها حد أقل من أدنى حل علوى للحلول العملية (الممكنة) التى تم تحديدها حتى حينه يمكن التفرع منها وتحديد حدود للمسائل الجزئية الجديدة .

وسوف نشرح طريقة الفرع والحد لحل المسأله العامة للبرمجة العدديه المختلطة.
وسوف نحدد الطريقة بشرح مثال مبسط :

مثال :

المطلوب تدنية :

$$\text{ص} = ٣\text{س}_١ + ٤\text{س}_٢$$

$$\text{س}_١ + ٢\text{س}_٢ \geq ٥$$

$$٣\text{س}_١ - \text{س}_٢ \geq ١$$

$$\text{س}_١ + \text{س}_٢ \leq ٥$$

$$\text{س}_١ ، \text{س}_٢ \geq \text{صفر}$$

$\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ أعداد صحيحة

خطوات الحل :

الخطوة الأولى :

إهمل قيد العددية و حل مسألة البرمجة كمسأله برمجة عادية . حيث يعطى ذلك الحل

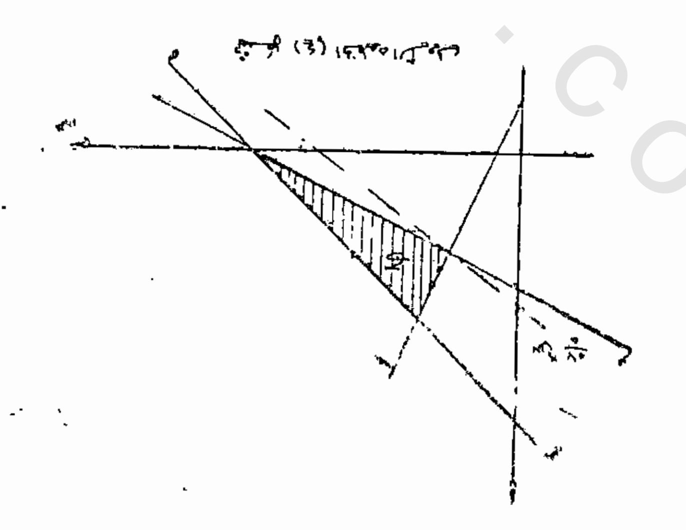
$$س_0^* = \frac{٥٧}{٥}$$

$$س_1 = \frac{٧}{٥}$$

$$س_2 = \frac{٩}{٥}$$

ويمثل ذلك فى شكل (٤)

$س_0^*$ تعتبر حد أدنى لكل الحلول العملية



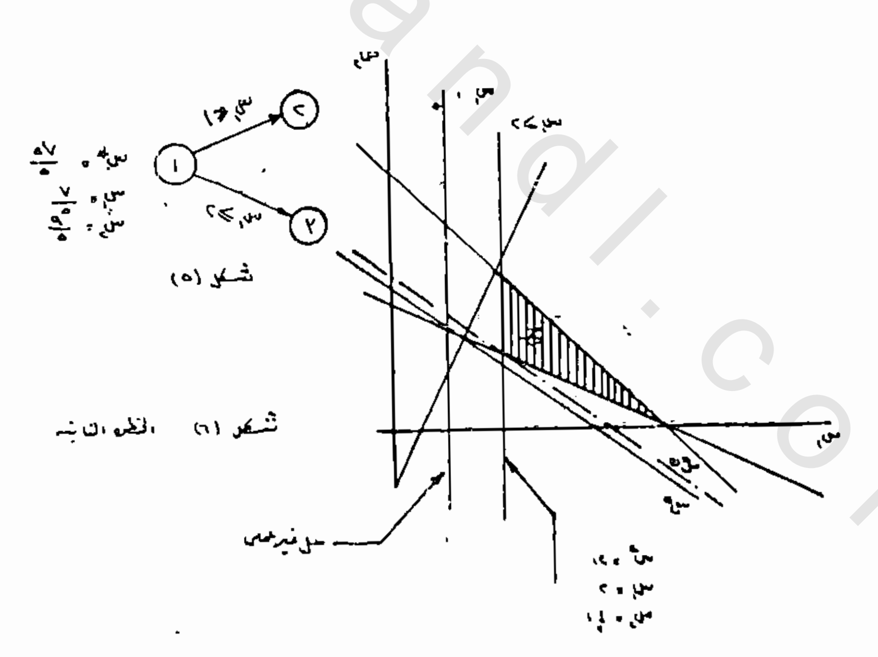
الخطوة الثانية :

س١ ، س٢ غير عدديه . إختار أحد المتغيرين للفرع فى الخطوة التالية .
أفترض أننا اخترنا س١ ويتم تجزئة الحل الممكن إلى مجموعتين إحداهما تحتوى على الحلول الممكنة والتى لها قيم عددية

$$س_١ < \left[\frac{٧}{٥}\right] = ١$$

$$\text{والأخرى}\quad س_١ \geqslant \left[\frac{٧}{٥}\right] = ٢$$

ويمثل ذلك فى شكل (٥) بالعقد (٢)



شكل (٥)

شكل (٦) الخطوة الثانية

ويمثل شكل (٦) هذه الخطوة حيث تؤدى القيد س١ $\leqslant$ ١ إلى حل عملى بينما يؤدى القيد س١ $\geqslant$ ٢ إلى س١ = ٢ ، س٢ = ١,٥ ، س٥^(١) = ١٢

الخطوة الثالثة :

نتفرع من العقد (٢) ويمثل ذلك في شكل (٧) وتتكون المسألتين التاليتين:

(١) تدنيه :

س. = ٣س١ + ٤س٢

مستوفيا

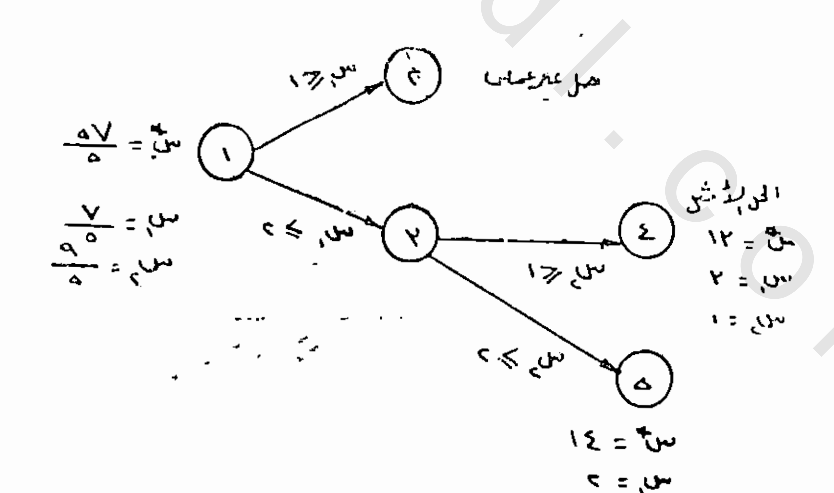
س١ + ٢س٢ ⩾ ٥

٢س١ + س٢ ⩾ ١

س١ + س٢ < ٥

س١ ⩾ ٢

س٢ <



شكل (٧)

(٢) تدنيه :

ص = ٣س١ + ٤س٢

مستوفيا

س١ + ٢س٢ ≤ ٥

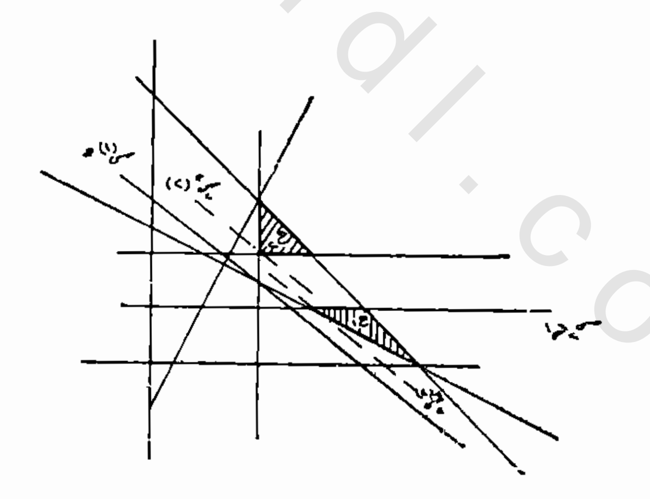
٢س١ − س٢ ≤ ١

س١ + س٢ ≥ ٥

س١ ≤ ٢

س٢ ≥ ٢

ويمثل ذلك فى الشكل (٨) حيث يعطى حل المسأله (١)



شكل (٨) الخطوة الثانية

$س_1 = ٢$

$س_2 = ١$

$س^{\circ(٢)}_{١٠} = ١٣$

ويعطى حل المسألة (٢)

$س_1 = ٢$

$س_2 = ٢$

$س^{\circ(٢)}_{٢٠} = ١٤$

وبذلك يكون الحل الأمثل المطلوب هو عند العقد (٤) فى شكل (٧) وهو المناظر لـ :

$$س_1 = ٣ \ ، \ س_2 = ١ \ ، \ س^{\circ}_{.} = ١٣$$

ويمكنا الآن إستنتاج الخطوات التالية لأسلوب الفرع والحد فى حل مسألة البرمجة الخطية العددية (المختلطة) :

سوف نحتاج إلى بعض التعريفات :

نعرف ما يلى :

$م_{.}$ = مسألة المثلية الأساسية (المسألة الكاية للبرمجة الخطية العددية)

$س^{\circ}_{.}$ = الحد الأدنى الحالى لقيمة الحل الأمثل

ل = ١ ، ٢

$(م_ن)_ل$ = المسألة الجزئية الحالية التى يتم إختبارها

$(م'_ن)_ل$ = المسألة الجزئيه الحالية التى يتم إختبارها بدون قيد العددية

قائمة الاستطلاع = مجموعة المسائل الجزئية القابلة للإختبار

الخطوة (١) س.* = ∞

ك = ١

مق(١) = م

الخطوه (٢) ضع ل = ١

الخطوة (٣) مق(١) = م(١) [المسألة الجزئيه الأولى هى مسألة البرمجة بدون شرط العددية]

الخطوة (٤) حل مق(١) بطريقة السمبلكس .
قيمة الحل هى الحد لـ مق(١) . إذا كانت م(١) ليس لها حل ممكن ضع الحد مساويا ∞

الخطوة (٥) إذ كانت م(١) لها حل عملى للمسألة م انتقل إلى الخطوة (٦) وإلا فإنتقل إلى الخطوة (٨)

الخطوة (٦) إذا كانت قيمة دالة الهدف بإستخدام الحل من الخطوة (٥) أقل من س.* إنتقل إلى الخطوة (٧) وإلا فإنتقل إلى الخطوة (١٠)

الخطوة (٧) ضع س.* مساوية لقيمة دالة الهدف من الخطوة (٦) انتقل الى الخطوة (١٠)

الخطوة (٨) اذا كان الحد المحسوب فى الخطوة (٤) أقل من س.* انتقل الى الخطوة (٩) والا فإنتقل الى الخطوة (١٠)

الخطوة (٩) أضف م(١) الى قائمة الاستطلاع . إنتقل الى الخطوه (١٠)

الخطوه (١٠) اذا كانت ل = ك انتقل الى الخطوه (١٢) والا فإنتقل الى الخطوه (١١)

الخطوه (١١) ضع ل = ل + ١ . انتقل الى الخطوه (٢)

الخطوه (١٢) اذا كانت قائمة الإستطلاع فارغة انتقل الى الخطوه (١٥) والا فإنتقل الى الخطوه (١٣)

الخطوه (١٣) أزل المسألة من قائمة الاستطلاع .
آخر مسألة تدخل فى القائمة هى أول مسألة تخرج منها ويرمز لها
م ل = ٢

الخطوه (١٤) اختار قيمة غير عددية (حقيقية) لأحد المتغيرات س ر من الحل م وجزىء م ق الى مسألتين (م ق)١ و (م ق)٢
(م ق)١ هى المسألة م ق بإضافة القيد س ر ≥ [س° ر]
حيث [س° ر] المقدار الصحيح فى س ر
م ق(٢) هى المسألة ق ت بإضافة القيد س ر ≤ [س° ر] + ١
أرجع للخطوه (٢)

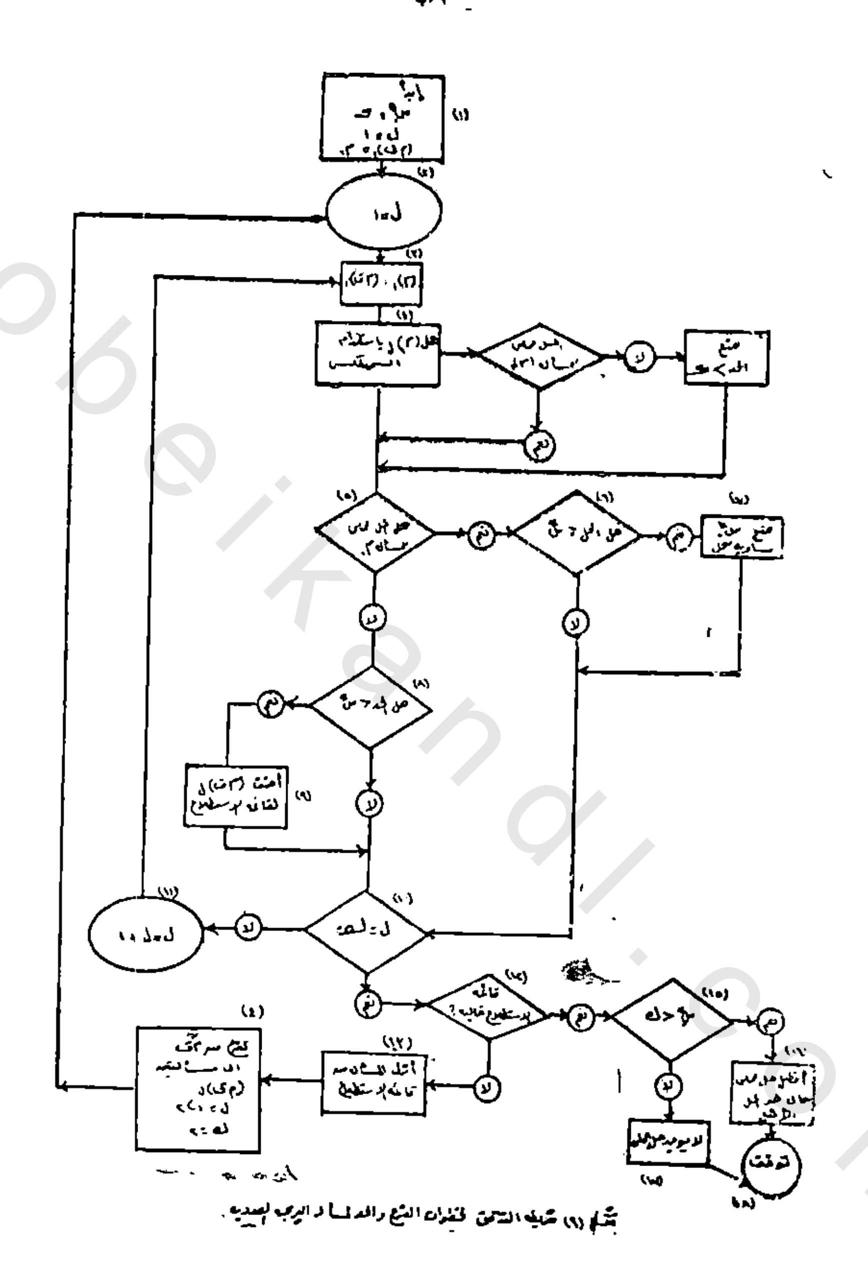
الخطوه (١٥) اذا لم يكن هناك حل على انتقل الى الخطوه (١٧) والا فإنتقل الى الخطوه (١٦)

الخطوه (١٦) أفضل حل ممكن حتى الآن هو الحل الأمثل للمسألة الرئيسية م .
انتقل للخطوه (١٨)

الخطوه (١٧) لا يوجد حل للمسألة م.

الخطوه (١٨) توقف

ويوضح شكل (٩) خريطة التدفق لقواعد وخطوات طريقة الفرع والحد لمسألة البرمجة العددية (المختلطة)



شكل (١) خريطة التدفق لفقرات المتغير والمدخلات البرنامج الصديه .

(٦ - ٤) التطبيقات المعيارية للبرمجة العددية :

(٦ - ٤ - ١) مسألة تحديد المواقع :

سبق أن أوردنا هذه المسألة فى مجالات تطبيق البرمجة الخطية تفصيلا ويهمنا هنا أن نوضح حالة عملية للتطبيق(*) لتوضيح أهمية هذه المسألة وخاصة حاليا فى مجال دراسات الطاقة فى مصر .

المسألة التى نعرض لها هى كيفية تحديد مواقع محطات القوى (النووية فى هذه الدراسة) اللازمة لإحتياجات الكهرباء فى منطقة جغرافية .

وتأخذ الدراسة مراكز الأحمال فى المنطقة موضع الدراسة كأساس للتوزيع الجغرافى للاحتياجات المطلوبة . وقد فرضت إقتصاديات التشغيل للمحطات النووية أن تكون طاقة هذه المحطات نمطية وفى حدود ١٠٠٠ ميجاوات (أو أكثر) .

والمطلوب هو إستيفاء الأحتياجات السنوية المطلوبة للطاقة عند مراكز الأحمال (مراكز الاستهلاك) بما فى ذلك أحمال الذروة المتوقعة .

ومعيار التفضيل هو إختيار مجموعة المواقع التى تحقق أقل تكلفة كلية تشمل تكلفة الإنشاء والتشغيل والتى تختلف من موقع إلى آخر مضافا إلى ذلك تكاليف نقل الطاقة من مواقع المحطات إلى مراكز الاستهلاك .

(*) راجع فى هذا الشأن :

Dutton Hinman And Millman « Theoptimal Allocation of Neuclear Power Facilitiyes Inthe Pacific North - West » JR. ORSA V22 NO. 3 PP 478-487

في بداية الدراسة يجب حصر مجموعة المواقع العملية للانشاء التي عددها م [و = ١ ، ٠٠٠ ، م] وفي هذه الحالة الخاصة كانت م = ١٣ .

كذلك يجب تحديد مراكز الاستهلاك التي عددها ن ، [س = ١ ، ٠٠٠ ، ن] . وفي هذه الحالة ن = ٨ . ويمثل جدول (١٥) وجدول (١٦) البيانات الرئيسية المطلوبة لهذا النوع من المسائل . والقيم الخاصة لهذه البيانات في الحالة قيد البحث .

جدول (١٥)

الموقع و	تكلفة الإنشاء المتغيرة (مليون جنيه)	تكلفة التشغيل المتغير (مليم)	الموقع و	تكلفة الإنشاء المتغيرة	تكلفة التشغيل المتغير
١	٤٫١٦	٫٦١	٨	٥٫٢٤	٣٫٠٣
٢	٤٫١٢	٫٨٨	٩	٥٫٢٧	٣٫٠٣
٣	٤٫٦١	٫٦٣	١٠	٤٫٤٦	١٫٠١
٤	٥٫١٣	٣٫٨	١١	٤٫٥٤	١٫٠١
٥	٥٫٦١	٣٫٧٢	١٢	٤٫٥٧	١٫٠١
٦	٤ ٣٧	١٫٠١	١٣	٤٫٧	١٫٠١
٧	٤٫٧	٫٧٦			

جدول (١٦)

مركز الحمل	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
إحتياج الدورة ميجاوات	٢١٦	٠٣٥	٢١٦	٢٠١٠	١٥٤٠	٢٨١٠	١٦٢٠	٢١٧
الاحتياج السنوى ١٠٠ ميجاوات	١٩٤٠	٣٤٠٠	١٩٤٠	١٢٤٠٠	٩٥٠٠	١٧٠٠٠	٩٩٠٠	١٤٦٠

يمكن صياغة النموذج الرياضي للمفاضلة بين المواقع للمسألة موضع الدراسة كما يلى :

عرف ما يلى :

ت و = التكلفة السنوية للانشاء للمحطة و

ج ن = حمل الذروة للمركز ن

ف ن = الاحتياج السنوى للمركز ن

ح و = مصاريف التشغيل السنوية لكل كيلوات المحطة و

هـ و ن = تكلفة نقل الكيلوات من المحطة و المركز ن

ص و ن = كمية الكيلوات من الكهرباء المستخدمة من المحطة و لتغطية إحتياج الذروة المنطقة ن

س و ن = كمية الكيلوات من الكهرباء المنقولة من المحطة و لتغطية الاحتياج السنوى للمنطقة ن

ط و = الطاقة القصوى الاسمية للمحطة و

ى و = متغير ثنائى

ى و = صفر { إذا لم يستخدم الموقع و لإنشاء المحطة
ى و = ١ { إذا استخدم الموقع و لإنشاء المحطة

فى معظم دراسات الطاقة يتم تقدير الاحتياج السنوى للمركز على أساس ٧٠ ٪ من حمل الذروة مضروباً فى ساعات التشغيل السنوية وهى :

٣٦٥ × ٢٤ = ٨٧٦٠ ساعة أى أن :

ب ن = ٠,٧ (٨٧٦٠) هـ ن = ٦١٣٠ هـ ن

كما استخدم ٨٥ ٪ من الطاقة الإسمية للمحطة أى أن الطاقة المستغلة $= \text{٨٥,}\ \text{ط}_{\text{و}}$

المسألة هى :

تدنيه :

$$\text{ق} = \sum_{\text{و}=1}^{13} \text{ت}_{\text{و}}\ \text{ى}_{\text{و}} + \sum_{\text{و}=1}^{13} \sum_{\text{ر}=1}^{8} \text{ح}_{\text{ور}}\ \text{ض}_{\text{ور}} + \sum_{\text{و}=1}^{13} \text{ح}_{\text{و}} \sum_{\text{ر}=1}^{8} \text{ص}_{\text{ور}} \qquad (\text{٤٤})$$

مستوفيا

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\text{ر}=1}^{8} \text{ص}_{\text{ور}} < \text{٨٥,}\ \text{ط}_{\text{و}}\ \text{ى}_{\text{و}}\ \text{(قيد مواجهة إحتياج الذروة)} \\ \sum_{\text{ر}=1}^{8} \text{ص}_{\text{ور}} < 6120\ \text{ط}_{\text{و}}\ \text{ى}_{\text{و}}\ \text{(الطاقة السنوية)} \\ \sum_{\text{و}=1}^{13} \text{ص}_{\text{ور}} \geqslant \text{ب}_{\text{ر}}\ \text{(احتياجات المراكز السنوية)} \\ \sum_{\text{و}=1}^{13} \text{ص}_{\text{ور}} \geqslant \text{خ}_{\text{ر}}\ \text{(احتياجات الذروة للمراكز)} \\ \text{ض}_{\text{ور}} < 8760\ \text{ص}_{\text{ور}}\ \text{(إستخدام نفس الخطوط لمواجهة الذروة)} \\ \text{ض}_{\text{ور}}\ ،\ \text{ص}_{\text{ور}} \geqslant \text{صفر} \\ \text{ى}_{\text{و}} = \text{صفر أو واحد} \end{array} \right. \qquad (\text{٤٥})$$

والمسألة السابقة مسألة برمجة عددية مختلطة يمكن حلهـا باستخدام برنامج الفرع والحد المشروح فى شكل (٩) مبرمجا على الحاسب الآلى .

الحل الأمثل للمسألة السابقة هى :

و* = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣]
والموقع المرفوض هو و = { ٤ }

ومن المهم أن نذكر أن نموذج المفاضلة بين المواقع (٤٤) ، (٥٥) يصلح بتعديلات طفيفة لكثير من التطبيقات العملية الهامة .

(٦ - ٤ - ٢) مسألة تخصيص الموارد فى تنفيذ المشروعات :

مسائل تخطيط انجاز المشروعات فى ظل قيود الموارد مسألة هامة يمكن حلها (كما سوف نبين فى باب التحليل الشبكى) بطرق تجريبية كما يمكن دراستها وتعميق المفاهيم المتعلقة بها بصياغتها كمسألة برمجة عددية (صفر ١) .

أفترض أن و = ١ ، ... ، م هى مؤشرات الموارد المطلوب تخصيصها للأنشطة ر = ١ ، ... ، ن المطلوب انجازها خلال الفترات :

ف = ١ ، ... ، ى

عرف ما يلى :

هـ ر = الأنشطة السابقة للنشاط ر

س ر ف = صفر اذا كان النشاط ر لا يتنفذ فى الفترة ف

س ر ف = ١ اذا كان النشاط ر ينفذ فى الفترة ف

$ب_{وف}$ = الكمية المتاحة للمورد و فى الفترة ف (يوم - أسبوع)

$أ_{ور}$ = الكمية المطلوبة من المورد (و) لإنجاز النشاط ر

$ى_{ر}$ = فترات (زمن) إنجاز النشاط ر

ويتوفر فى المسألة القيود الفنية والتعريفية التالية :

$$\sum_{ف}^{ى} س_{رف} \geq ى_{ر}$$ (قيد للتأكد من تنفيذ كل الأنشطة خلال الفترة الكلية ى للتنفيذ)

$$\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ور} س_{رف} \leq ب_{وف}$$ (الموارد المتاحة)

$$\sum_{هـ}^{ف} س_{رف} \leq \sum_{ل=1}^{ف-1} س_{هل}$$ (لا يبدأ نشاط قبل انهاء الأنشطة السابقة له) وذلك لجميع قيم $هـ_{ر}$ السابقة للنشاط ر

$$ى_{ر} س_{رف} - ى_{ر} س_{رف+1} + \sum_{ر=ف+2}^{ى} س_{رل} \geq ى_{ر}$$ (إذا بدأ نشاط يستمر حتى النهاية) لجميع قيم ف ، ر

(٤٧)

$س_{رف}$ = صفر أو واحد

هذه القيود (٤٧) يجب استيفاؤها مع تحقيق أقل زمن إنجاز ممكن والذى يمكن أن يكون :

$$س_{.} = \text{مجـ}_{ر=1}^{ن} \text{حـ}_{ل}\, س_{ر ى ف + ل} \qquad (٤٨)$$

$ل = ١ ، ٠٠٠ ، ى$

$ى \geqslant ف \geqslant$ صفر

حـل أوزان نختارها لنضمن تتابع المشروع فى أقصر زمن حيث حـل+١ = ت حـل وفى معظم التطبيقات ت = ٤

إذا كان من ناحية الصياغة استطعنا بناء نموذج يعبر عن إنجاز المشروعات فى ظل قيود الموارد . فإن حل هذا النموذج بإستخدام طرق البرمجة العددية لمسائل ذات حجم عملى لا يؤدى إلى نتائج طيبة وذلك لأن عدد القيود والمتغيرات يكون كبيراً جداً بصورة تجعل زمن الحل حتى بإستخدام الحاسبات الآلية غير عملى .

(٦ - ٤ - ٣) استخدام البرمجة العددية فى حـل مسائل البرمجة الغير خطية ذات الدوال المنفصلة :

مسألة البرمجة الغير خطية المقصودة عنا هى دالة الهدف ذات الدوال الغير خطية المنفصلة والقيود الخطية والتى هى على الصورة :

تعظيم :

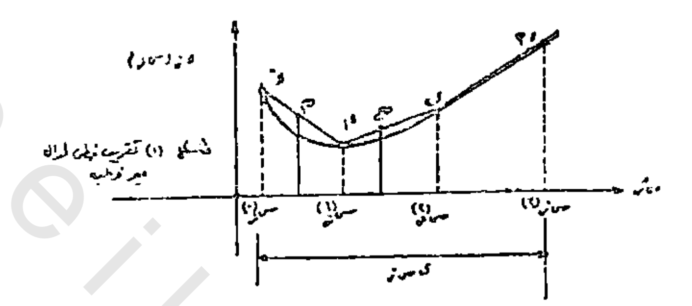
$$ع = د_{١}(س_{١}) + د_{٢}(س_{٢}) + \cdots + د_{ن}(س_{ن})$$

مستوفيا

$$\left.\begin{aligned} &أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + \cdots + أ_{١ن} س_{ن} \leqslant ب_{م} \\ &أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + \cdots + أ_{٢ن} س_{ن} \leqslant ب_{م} \\ &\vdots \\ &أ_{م١} س_{١} + أ_{م٢} س_{٢} + \cdots + أ_{من} س_{ن} \leqslant ب_{م} \end{aligned}\right\} \qquad (٤٩)$$

هذه الصورة المعبر عنها فى النموذج (٤٩) تظهر كثيرا فى حالة دوال التكلفة أو الربح الغير خطية :

شكل (١٠) يمثل أحد الدوال د ر (س ر)



يوضح شكل (١٠) تقريب خطى لدالة غير خطية . حيث يمكن التعبير عن تكلفة الإنتاج د (س) المناظر لحجم الإنتاج س وبدلالة التقريب الخطى كما يلى :

$$\left.\begin{array}{l} د(س) = ل_{٠}\, س_{٠} + ل_{١}\, س_{١} + ل_{٢}\, س_{٢} + ل_{٣}\, س_{٣} \\ ١ \geqslant ل_{ف} \geqslant \text{صفر} \ ، \ ف = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ \\ ل_{٠} + ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} = ١ \end{array}\right\} \qquad (٥٠)$$

ونظراً لأن فى التقريب الخطى يتضمن الحل فقط قيم المقسمات ل ف ، ل ف + ١ فمثلا :

$$\left.\begin{array}{l} د(سق_{١}) = \lambda_{٠}\, د_{٠} + \lambda_{١}\, د_{٢} \\ د(سق_{٢}) = \lambda_{١}\, د_{١} + \lambda_{٢}\, د_{٢} \end{array}\right\} \qquad (٥١)$$

والضمان تحقيق ذلك تضاف القيود :

$$\left.\begin{array}{l} ل_{٠} \leqslant هـ_{٠} \\ ل_{١} \leqslant هـ_{٠} + هـ_{١} \\ ل_{٢} \leqslant هـ_{١} + هـ_{٢} \\ ل_{٣} \leqslant هـ_{٣} \\ هـ_{١} + هـ_{٢} + هـ_{٣} = ١ \\ هـ_{ف} = \text{واحد أو صفر} \end{array}\right\} \quad (٥٢)$$

وعندما تكون $هـ_{ف} = ١$ تكون $هـ_{ف}$ ، $هـ_{ف+١} \leqslant$ صفر

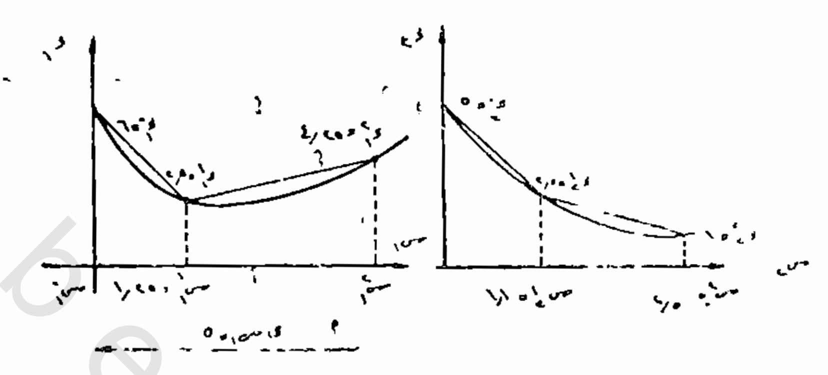
وذلك لأى قيمة $س = ل_{٠} س_{٠} + ل_{١} س_{١} + ل_{٢} س_{٢} + ل_{٣} س_{٣}$ (٥٣)

والتوضيح طريقة استخدام الصياغة السابقة نورد المثال التالى :

المطلوب تدنية :

$$\left.\begin{array}{l} ع = د_{١}(س_{١}) + د_{٢}(س_{٢}) \\ \text{مستوفيا} \\ ١ + س_{٢} \leqslant ٦ \\ س_{١} + س_{٢} \leqslant ٥ \\ س_{١} ، س_{٢} \leqslant \text{صفر} \end{array}\right\} \quad (٥٤)$$

حيث $ى_1$ (س$_1$) ، $ى_2$ (س$_2$) ، موضحة فى شكل (١١) .



شكل (١١) . الدوال $ى_1$ ، $ى_2$

إن أقصى مدى الم...ت س$_1$ ، س$_2$ يمكن الحصول عليه من القيود حيث:

$$ى س_1 = \text{أكبر} \left(\frac{6}{3} ، \frac{5}{1} \right) = 5$$

$$ى س_2 = \text{أكبر} \left(\frac{6}{3} ، \frac{6}{6} \right) = 3$$

وبذلك يمكن صياغة (٥٤) كمسألة برمجة عددية كما يلى :

تدنيه :

ع = (٦ ل١٠ + ٥و٢ ل١١ + ٢٥و٤ ل١٢)
(٥ ل٢٠ + ٥و٢ ل٢١ + ل٢٢)

مستوفياً

٣(٠ ل١٠ + ٢٥و١ ل١١ + ٥ ل١٢)
+ ٢ (٠ ل٢٠ + ١و١ ل١٢ + ٣ ل٢٢) ≥ ٦

(٠ ل١٠ + ١,٢٥ ل١١ + ٥ ل١٢)
+ ٥ (٠ ل٢٠ + ١,١ ل١٢ + ٣ ل٢٢) ≥ ٥

ل١٠ + ل١١ + ل١٢ = ١ (٥١)

ل٢٠ + ل٢١ + ل٢٢ = ١

ل١٠ < هـ١٠

ل١١ < هـ١٠ + هـ١١

ل١٢ < هـ١٢

ل٢٠ < هـ٢٠

ل٢١ < هـ٢٠ + هـ٢١

ل٢٢ < هـ٢٢

هـ١٠ + هـ١١ + هـ١٢ = ١

هـ٢٠ + هـ٢١ + هـ٢٢ = ١

هـ ف ر = صفر أو واحد

١ ≥ ل ف ر ≥ ٠

والمسألة السابقة يمكن حلها كمسألة برمجة عددية مختلطة .

لكن يلاحظ أن عدد المتغيرات أصبح ١٢ متغيرا بدلا من ٢ من المسألة الأصلية .

وعدد القيود أصبح ٢٤ بدلا من ٢ فى المسألة الأصلية .

إن دالة الهدف الغير خطية فى أبسط صورها هى ما تسمى بمسألة التكلفة الثابتة
Fixed - charge Problem

وهى التى تكون الدالة د. (س ر) على الصورة :

$$د_ر (س_ر) = \begin{cases} \text{صفر} & \text{عندما } س_ر = \text{صفر} \\ ا_ر + ح_ر س_ر & \text{عندما } س_ر > \text{صفر} \end{cases} \qquad (٥٢)$$

فى هذه الحالة يمكن التعبير عن الدالة الكلية ع :

$$ع = \text{مجـ } د_ر (س_ر) = \text{مجـ } هـ_ر ا_ر + ح_ر س_ر \qquad (٥٣)$$

ولضمان عدم ظهور هـ ر إلا فى حالة وجود س ر بضمان القيد التالى :

$$\left. \begin{array}{l} س_ر \leqslant ح\, هـ_ر \\ \text{أو :} \\ س_ر - ح\, هـ_ر \leqslant \text{صفر} \end{array} \right\} \qquad (٤)$$

حيث : ح الحد الأعلى لقيمة المتغير س ر .

فعندما س ر موجبة يجب ظهور هـ ر لتحقيق القيد (٥٤) . وفى حالة عدم ظهور س ر فإن هـ ر تكون مساوية للصفر كنتيجة حتمية لتدنية (٥٣) .

(٦ - ٤ - ٤) إدارة التغذية(٥) :

سبق أن ذكرنا مسألة التغذية فى مجال البرمجة الخطية . وفى دراستنا السابقة لهذه المسألة تعرضنا إلى إختيار مجموعة الأطعمة التى تحقق متطلبات دنيا لعناصر الغذاء وتحقق أقل تكلفة للتغذية ، ولم تعرض الدراسة لمفهوم إدارة التغذية بالمعنى الحقيقى . وسوف ندرس هذه المسأله فى هذا البند .

إدارة التغذية تهتم بإتخاذ القرارات الخاصة بتغذية أو إطعام تعداد معين من الأشخاص بتقديم مأكولات أو وجبات معده بإستخدام مواد الطعام الأولية . ومن المهم فى تحديد هذه الوجبات إرضاء الذوق العام للأشخاص أو التعداد المعنى بالتغذية أو ما يسمى برضاء أو إرتياح التعداد . وفى نفس الوقت تفى بإحتياجات التغذية المطلوبة فى أى مسألة تغذية وهى توفر عناصر التغذية على صورة حدود دنيا موضوعة لهذا الغرض بالإضافة إلى إمكانية اعداد هذه الوجبات بالمواد المتاحة .

ونقطة التعامل بين جمهور التعداد المعنى بالتغذية (المنتفعين) وبين إدارة التغذية هى قائمة الطعام التى تحدد مدى قبول المنتفعين للوجبات كما تحدد أيضا صلاحيتها الغذائية وتكلفة نظام التغذية . وفى حالة نظام التغذية الغير إختيارى أى الذى تحدده الإدارة دون إختيار لجمهور المنتفعين فإن الادارة تمارس رقابة كاملة على نظام التغذية . وهناك عدد كبير من الإمثلة العملية التى تخضع لهذا النظام مثل نظام تغذية المرضى فى المستشفيات أو العمال فى المصانع أو الطلبة فى دور العلم أو

---

(٥) راجع فى ذلك :

Joshel. L. Balintfy « A mathcmatical Programming System for food Manag ement APPlications »
Interface ' Vol 9 No1 Pt.s Nov, 1975 PP 13 - 31

الجنود فى المعسكرات والثكنات حيث يتم تقديم الوجبات للمنتفعين بطريقة غير إختيارية (إجبارية) .

أن اهمية إدارة التغذية وتخطيط الوجبات ظهرت حديثاً فى كثير من الدراسات حيث أدت إلى تحسين مستوى الخدمة وإرتياح المنتفعين وتقليل التكلفة .

يستخدم لفظ « قائمة » للدلالة على ترتيب الأطعمة طبقاً لهيكل الوجبة وترتيب الوجبات خلال اليوم .

بينما يستخدم تعبير (جدولة القائمة) للدلالة على ترتيب الأطعمة فى الوجبات المختلفة خلال الأيام .

وتسمى القائمة إختيارية إذا كان هناك مجال للاختيار بين الاطعمة فى القائمة فإذا لم يتحقق ذلك فهى إجبارية .

ويمكن صياغة نموذج رياضى لهذه المسألة كما يلى :

أفترض أن : $س_{ورف}$ = واحد أو صفر تدل على استخدام الطعام و فى الترتيب ر فى الوجبة ف من عدمه وأن $ح_و$ = تكلفة الطعام و

المطلوب تدنية تكلفة نظام التغذية :

$$ع = \sum_{و=1}^{م} ح_و \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{ف=1}^{ى} س_{ورف} \qquad (٥٥)$$

مستوفيا

أولا : شروط توافر عناصر التغذية المطلوبة . والتى تشترط توفر العناصر بحدود دنيا $ب_{لف}$ للعنصر ل فى الوجبة ف إذا كان $أ^{(1)}_{ول}$ ما يحتويه الطعام (و) من العنصر ل . فإن هذا القيد يكون على الصورة :

$$\sum_{و=1}^{م} أ^{(1)}_{ول} \left(\sum_{ر} س_{ورف} \right) \geqslant ب_{لف} \qquad (٥٦)$$

ثانياً : شرط عدم تكرار طعام فى نفس الوجبة أو فى نفس اليوم (ليتحقق إرتياح جمهور المنتفعين والحفاظ على جودة الخدمة .

$$\text{مج}_{ر=1}^{ن} \; ا^{(٢)}_{و ز ر} \; س_{و ز ر ف} \leqslant ١ \qquad (٥٧)$$

$ا^{(٢)}_{و ز ر}$ = معاملات تأخذ القيم صفر ، ١ . لأن $س_{و ز ر ف}$ أيضاً تأخذ القيم صفر و واحد .

ثالثا : قيود هيكلية الأطعمة :

الغرض من هذا القيد ضمان عدم دخـــول الأصناف المتعارضة فى الوجبة الواحدة . إذا أمكن تقسيم الأطعمة إلى مجموعات $م_ى$ حيث :

$\text{مج}_{ى}\, م_ى = م$ والأطعمة فى $م_ى$ متعارضة بحيث أن ى = ١ ، ٢ ، ... ، ط تظهر مرة واحدة فى الوجبة فإن :

$$\text{مج}_{و=1}^{م} \; ا^{٣}_{و ز ر} \; س_{و ز ر ف} = ١ \qquad (٥٨)$$

حيث $ا^{٣}_{و ز ر}$ معاملات ١ ، صفر

رابعاً : قيود الفاصل الزمنى ـ لوجود فترة زمنية ى لتكرار الصنف $س_{و ز ر ف}$ حيث $ا^{٤}_{و ز ر}$ يتم تحديد معاملات طبقا لتحديد (ى) .

$$\text{مج} \; ا^{٤}_{و ز ى} \; س_{و ى ر ف} = \text{صفر} \qquad (٥٩)$$

$$\text{بالإضافة إلى القيد } س_{و ز ر ف} = \text{صفر أو واحد} \qquad (٦٠)$$

(٦ - ٤ - ٥) مسألة تجهيز الخامات لتقليل الروادم(*)

Stock - Cutting Proplem

فى كثير من الصناعات تنتج الخامات بأبعاد نمطية ثم يتم تقطيعها وتجهيزها طبقا لطلبات العملاء يحدث ذلك بشكل واضح فى صناعات الورق وصناعات الزجاج ودلفنة الألواح كما يواجه الترسانات المنتجة لهياكل السفن من الألواح المعدنية . ويتخلف من عملية التجهيز إجزاء لاتصلح للإستخدام وهى ما تسمى بالروادم . والمطلوب هو تجهيز الخامات لتدنية الرادم إلى أقصى قدر ممكن .

وهناك مسألتين فى هذا الصدد المسألة الأولى هى تجهيز الخامات بالقطع فى إتجاه واحـــد (وحيدة البعد) والمسألة الثانية هى تقطيع الخامات فى بعدين (مساحات) .

وسنبدأ بالمسألة الأولى .

افترض أنه لدينا الأطوال ل$_و$ = ل$_١$ ، ل$_٢$ ، ... ، ل$_م$ التى يجب قطعها وأن المطلوب عدد مقداره ب$_١$ من ل$_١$ ، ب$_٢$ ، ل$_٢$ ، ب$_م$ من ل$_م$.

أفرض أن لدينا مجموعة من التوفيقات الممكنة للقطع والتى أمكن حصرها ت$_ر$ = ت$_١$ ، ت$_٢$ ، ... ، ت$_ن$. أرمز بالرمز او$_ر$ للعدد المنتج من الطول (و) بالتصميم أو التوفيق ر .وبالرمز حـ$_ر$ للفاقد المتخلف من هذا التصميم . (شكل ١٠) .

(*) راجع :

(1) Vajda « Reading In L.P » John Wiley , Sons, 1958
(2) Christo Fiedts, « An Algorithm For TWo Dimensional Cutting Proplem » Jr. Orsa V 25 No 1,1977 pp 30 - 44
(3) Dychoff « AneW Linear Programming Approach To The Cutting Stock Proplem » Jr. Orsa V 29 No 6 1981

أرمز بالرمز $س_ر$ ، لعدد التصميمات (ر) . إذا كان هدف البرنامج تدنية العوادم الكلية فإن :

المطلوب :

تدنية : $غ = \sum_{ر=1}^{ن} ع_ر س_ر$

مستوفيا

$\sum$ او ر س ر $\leq$ ب و

و = ١ ، ... ، م (٦١)

س ر أعداد صحيحة

	ل	ل	ل	
	ل	ل	ل	ل
ل	ل	ل	ل	ل

	ل	ل	ل	
	ل	ل	ل	ل
ل	ل	ل	ل	ل	ل

التصميم (ب) التصميم (أ)

يمكن صياغة المسألة (٦١) بتعديل دالة الهدف دون حساب مسبق لقيمة العادم لكل تصميم . لأن بفرض أن عرض الخامة المراد تعظيمها ل

فإن مساحة الخـــامة المستخدمة هى ل ($س_1 + س_2 + ... + س_ن + س_{ن+1} + ... + س_{ن+م}$)

حيث $س_{ن+1}$ ، ... ، $س_{ن+م}$ المتغيرات العاطلة

بينما مساحة الأجزاء المنتجة هى $= ل_1 ب_1 + ل_2 ب_2 + ... + ل_م ب_م$ ،

وبذلك فإن العادم هو :

$$\text{ع} = \text{ل}\,(\text{س}_1 + \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_{\text{ن}+\text{م}}) - \text{ح ل}_{\text{و}}\,\text{ب}_{\text{و}} \qquad (٦٢)$$

ونظرا لأن ح ل و ب و كمية ثابتة . فإن تدنية (٦٢) يناظر تماما تدنية :

$$\text{س}_{.} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_{\text{ن}+\text{م}} \qquad (٦٣)$$

وبذلك يصبح البرنامج :

(٦٤)

تدنية :

$$\text{س}_{.} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \cdots + \text{س}_{\text{ن}+\text{م}}$$

مستوفيا

$$\text{أ}_{11}\text{س}_1 + \cdots + \text{أ}_{1\text{ن}}\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}+1} = \text{ب}_1$$

$$\text{أ}_{12}\text{س}_1 + \cdots + \text{أ}_{2\text{ن}}\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}+2} = \text{ب}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{أ}_{\text{م}1}\text{س}_1 + \cdots + \text{أ}_{\text{م}\text{ن}}\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}+\text{م}} = \text{ب}_{\text{م}}$$

$$\text{س}_1 ، \cdots ، \text{س}_{\text{ن}+\text{م}} \geq \text{صفر}$$

والمسألة الثنائية للمسألة (٤٦) هى :

(٦٥)

$$\text{ص}_{.} = \text{ب}_1\text{ص}_1 + \text{ب}_2\text{ص}_2 + \cdots + \text{ب}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{م}}$$

$$\text{أ}_{11}\text{ص}_1 + \text{أ}_{21}\text{ص}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{م}1}\text{ص}_{\text{م}} \leq 1$$

$$\text{أ}_{12}\text{ص}_1 + \text{أ}_{22}\text{ص}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{م}2}\text{ص}_{\text{م}} \leq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{أ}_{1\text{ن}}\text{ص}_1 + \text{أ}_{2\text{ن}}\text{ص}_2 + \cdots + \text{أ}_{\text{م}\text{ن}}\text{ص}_{\text{م}} \leq 1$$

$$\text{ص}_{\text{و}} \geq \text{صفر}$$

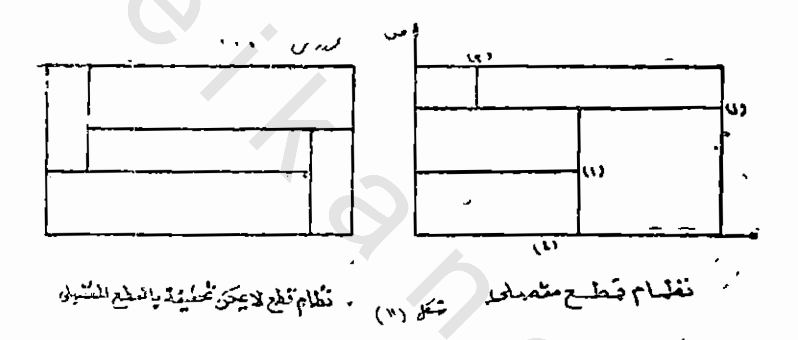
أما في حالة قطع المساحات فإن المسألة تصبح أكثر تعقيدا . ويلزمنا أن

نعرف من طريقتين للقطع فى هذا الصدد .

١ — القطع المتصلى : الذى فيه يتم القطع من حافة المعدن إلى حافة أخرى.
Guillotine Cut

٢ — القطع الغير متصلى : وهو غير مقيد بالشروط السابقة .
Non - Guillotine Cut

ويوضح ذلك فى شكل (١١) :



نظام قطع متصل — شكل (١١) — نظام قطع لا يمكن تحقيقه بالقطع المتصل

ويلاحظ فى كثير من الصناعات مثل صناعة الورق والزجاج أن القاطع المتصلى يكون سائدا .

أفترض أنه لدينا لوح مساحته ح وطوله ل وعرضه ى . والمطلوب تقسيمه إلى مجموعة (ت) من الألواح الصغرى بإبعاد :

ت = { ($ل_1$ ، $ى_1$) ، ($ل_2$ ، $ى_2$) ، ... ، ($ل_م$ ، ى) } . وكل قطعة فى المجموعة ت يصاحبها قيمة $ح_و$ ، و = ١ ، ... ، م وعدد أقصى $ب_و$ يمكن قصها من اللوح الأصلى ح المسألة موضع الدراسة هى :

تعظيم : ع $ح_و$ $ط_و$

$ط_و \leqslant ب_و$

ولكى نفرق بين اللوح الأصلى الناتج بعد تقطيعه أثناء إنتاج الألواح الصغرى ومن القطع النهائية نسمى الأولى بالألواح والثانية وهى الأجزاء الموجودة فى ت بالمنتجات .

والطريقة المستخدمة فى حل هذا النوع من المسائل هى طريقة السرد الضمنى:

الخطوة الأولى :

١ ـ تحديد طرق القطع الممكنة (العملية) للمربع

ح = [ل. ، ى.] التى يمكنها إنتاج المجموعة

ت = { (ل١ ، ى١) ، (ل٢ ، ى٢) ، ... ، (لن ، ىن) }

وذلك لتحديد إتجاهات القطع فى إتجاه المحور س ، والمحور ض بترتيب يمنع تكرار الحصول على نفس طريقة أو أسلوب التقطيع .

الخطـوة الثانية :

حساب الحد فى مراحل الحل وذلك بحل البرنامج

تنظيم :

ع = مجـ (ن / ك - ١) مجـ (ص / و — ١) حـوك سوك

مجـ سوك ⩽ ١

مجـ سوك ⩽ بو

سوك ⩾ صفر   و = ١ ، ... ، م (مدلول المنتجات)

ك = ١ ، ... ، ن (مدلول الألواح الناتجة بالقطع)

حيث : $ح_{وك} = ح_و$ عندما : $ل_و \leq هـ_ك$ ، $ء_و \leq ء_ك$

$ح_{وك} = -$ ك ماعدا ذلك

ان استخدام الطريقة السابقة فى الحالة التالية :

$ح. = [ل. ، ء.] = (٤٠ ، ٧٠)$ ، $م = ١٠$

ت = [(٢١ ، ٢٢) ، (٢١ ، ١٣) ، (٩ ، ٣٥) ، (٩ ، ٢٤) ، (٣٠ ، ٧) ، (١١ ، ١٣) ، (١٠ ، ١٤) ، (١٤ ، ٨) ، (١٢ ، ٨) ، (١٣ ، ٧)]

$ح_و$ = [٥٨٢ ، ٤٠٣ ، ٣١٥ ، ٢٢١ ، ٢١٠ ، ١٤٣ ، ١٤٠ ، ١١٠ ، ١٤٠ ، ٨٠ ، ٩٤]

$ب_و$ = [١ ، ١ ، ٣ ، ٣ ، ٢ ، ٣ ، ١ ، ٣ ، ٣ ، ٣]

شكل [١٢] الحل الأمثل للتقطيع فى المددين

فهرس الموضوعات

الباب الاول

مقدمة رياضية

ثانيـاً: التفاضل الجزئى والنهايات العظمى والصغرى

ثالثـاً: الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية والطرق العشوائية

الباب الثانى

مقدمة فى البرمجة الخطية

الباب الثالث

طريقة السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية

الباب الرابع
نماذج النقل

الباب الخامس

نظرية المباريات وعلاقتها بالبرمجة الخطية

الباب السادس

البرمجة العددية

المطبعة الكمالية

٥٩ شارع حلمي عبد اللطيف

عابدين ـ ت ٢٦٨٠٤

رقم الإيداع ٨٥/٤٤٢٩

الترقيم الدولي / /